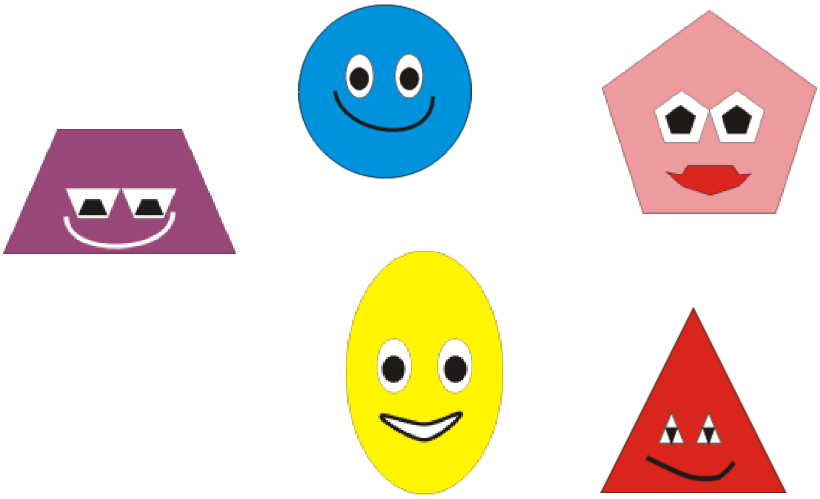


Н.А. БУБНОВА
О.А. ПЛАТОНОВА
В.Х. ХАХАНЯН

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие

МОСКВА–2014

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Факультет довузовской подготовки

Н.А. БУБНОВА, О.А. ПЛАТОНОВА, В.Х. ХАХАНЯН

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие

Под редакцией О.А. Платоновой

МОСКВА–2014

УДК 514 (07)
Б 90

Бубнова Н.А., Платонова О.А., Хаханян В.Х. – Геометрические и нестандартные задачи по элементарной математике. Учебное пособие. Под ред. О.А. Платоновой. – М.: МИИТ, 2014. – 138 с.

Целью учебного пособия является рассмотрение методов решения наиболее трудных типов задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах по математике в МИИТе.

Пособие предназначено для занятий со слушателями факультета довузовской подготовки, а также может быть использовано для подготовки к олимпиадам школьников.

Рецензент: к.ф.-м.н. доцент А.Л. Павлов, кафедра «Высшая математика» МЭИ.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое пособие содержит задачи по следующим разделам элементарной математики:

задачи по планиметрии на вычисление;

задачи по стереометрии;

нестандартные задачи.

Задачи из этих разделов вызывают наибольшие трудности при написании экзаменационной работы.

Каждый раздел начинается с разбора наиболее типичных примеров по данной теме. Основу пособия составляют задачи, предлагавшиеся на олимпиадах школьников «Паруса надежды» по математике в МИИТ. Все задачи снабжены ответами.

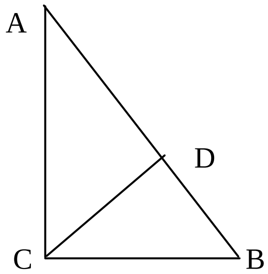
Данное учебное пособие может быть использовано при самостоятельной подготовке к поступлению в вуз, на подготовительных отделениях и курсах.

Раздел I. ПЛАНИМЕТРИЯ

В этом разделе приведены решения характерных задач по планиметрии, а также предложены задачи для самостоятельного решения. Все задачи снабжены ответами.

Задача 1. Найти гипотенузу прямоугольного треугольника, периметр которого равен $2p$, а высота, опущенная на гипотенузу, равна h.

Решение. Обозначим CB = a, AC = b, AB = c, CD $\perp$ AB, CD = h. $S\Delta$ABC = $\frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$, $ab = ch$



Составим систему уравнений.

$$\begin{cases} a + b + c = 2p, a + b = 2p - c \\ a^2 + b^2 = c^2, (a + b)^2 = (2p - c)^2 \\ ab = ch\ a^2 + 2ab + b^2 = 4p^2 - 4pc + c^2 \end{cases}$$

$2ch = 4p^2 - 4pc$

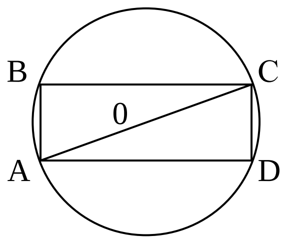
$c\,(h + 2p) = 2p^2$

$$c = \frac{2p^2}{h + 2p}$$

Ответ. $\frac{2p^2}{h+2p}$.

Задача 2. В круг вписан прямоугольник, стороны которого относится как 8:15. Определить эти стороны, если диаметр равен 34 см.

AC – диаметр, т.к.



$\angle$ABC = 90^0, AB : BC = 8 : 15.

Введем параметр t. AB = $8t$, BC = $15t$.

Из Δ ABC по теореме Пифагора, имеем

$AC^2 = AB^2 + BC^2$;

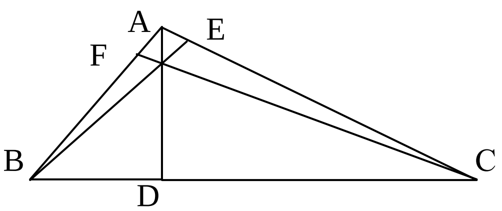
$34^2 = 64t^2 + 225t^2$;

$34^2 = 17^2\,t^2$; $34 = 17t$; $t = 2$

AB = 16 см, BC = 30 см.

Ответ. 16 см, 30 см.

Задача 3. В треугольнике известны сторона а и два прилежащих к ней угла B и C. Найти длины его высот.



Решение. Обозначим AB = c, AC = b, BC = a. AD = h_a, BE = h_b, CF = h_c.

Из Δ BEC имеем $h_b = a \sin C$

Из Δ BFC имеем $h_c = a \sin B$

Из Δ ABD имеем BD = $h_a \times \times$ ctg B.

Из Δ ADC имеем DC = $h_a \cdot$ ctg C. h_a ctg B + h_a ctg C = a

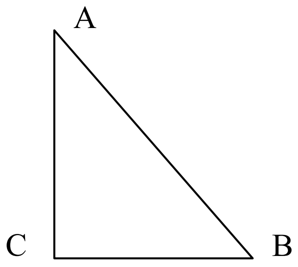
$$h_a = \frac{a}{\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C} = \frac{a \sin B \sin C}{\sin(B + C)}$$

Ответ. $a \sin C$, $a \sin B$, $\frac{a \sin B \sin C}{\sin(B+C)}$.

Задача 4. Длины сторон прямоугольного треугольника образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Найти синус меньшего угла этого треугольника.

Решение. Стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию.

Обозначим: AB = a + d, AC = a, тогда CB = a – d, $d > 0$. По теореме Пифагора имеем



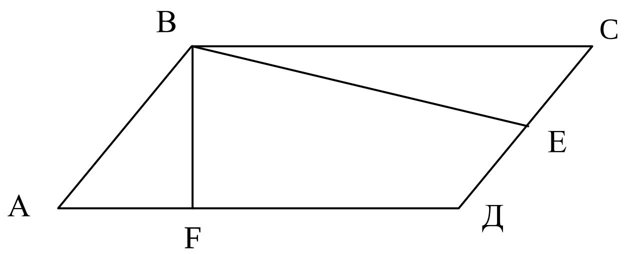
$$(a + d)^2 = a^2 + (a - d)^2.$$

$a = 4d$

$$\sin A = \frac{a-d}{a+d} = \frac{3d}{5d} = \frac{3}{5}.$$

Ответ. $\sin A = \frac{3}{5}$.

Задача 5. Определить углы параллелограмма, если даны две его высоты h_1 и h_2 и периметр $2p$.



Решение. BF, BE – высоты параллелограмма. $BF = h_1$, $BE = h_2$.
Пусть $AB = x$, $BC = y$.

$$2p = 2x + 2y;\ p = x + y;\ y = p - x$$

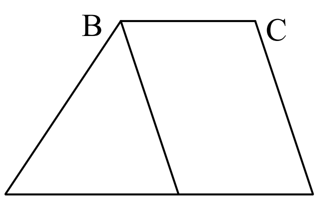
Площадь параллелограмма $S = x\, h_2 = (p - x)\, h_1$, отсюда

$$x = \frac{ph_1}{h_1 + h_2};\ \sin A = \frac{h_1}{x} = \frac{h_1 + h_2}{p};$$

$\angle A = \arcsin \frac{h_1 + h_2}{p}$; $\angle B = \pi - A = \pi - \arcsin \frac{h_1 + h_2}{p}$

Ответ. $A = C = \arcsin \frac{h_1 + h_2}{p}$; $B = D = \pi - \arcsin \frac{h_1 + h_2}{p}$

Задача 6. В трапеции АВСД боковые ребра равны 24 и 7, а разность оснований равна 25. Найти высоту трапеции.



Решение.
$AD \neq BC$, $AB = 24$, $CD = 7$.
АД – ВС = 25
Проведем BE || CD, BC = BD как отрезки параллельных прямых, отсекаемых параллельными прямыми.
A E D

AE = AD – BC = 25. H – высота трапеции. $H = \frac{2S\,\Delta ABE}{AE}$. $S\Delta ABE$ найдем по трем сторонам по формуле Герона

$$S\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-в)(p-c)},$$

где р – полупериметр, *а, в, с* – стороны треугольника.

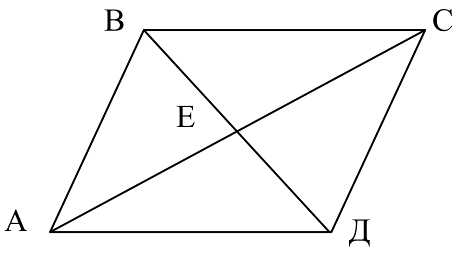
$$AB = 24,\ AE = 25,\ BE = 7.$$

$$S\Delta ABE = \sqrt{28 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 21} = \sqrt{4^2 \cdot 7^2 \cdot 3^2} = 84$$

$$H = \frac{168}{25} = 6{,}72.$$

Ответ. 6,72

Задача 7. Периметр ромба равен 28 см, а сумма длин диагоналей равна 18 см. Найти площадь ромба.



Решение. Обозначим ВД = d_1, АС = d_2, АД = a, a = 7. ΔАЕД прямоугольный, т.к. диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

По теореме Пифагора имеем: $\frac{d_1^2}{4}+\frac{d_2^2}{4}=a^2$

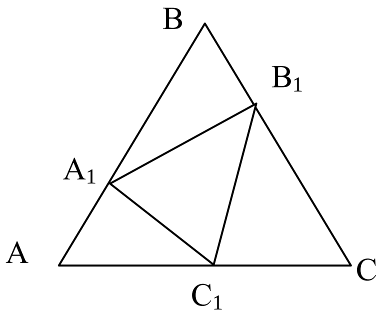
$$d_1^2+d_2^2=4a^2=4*49=196$$

$$d_1+d_2=18,\ (d_1+d_2)^2=d_1^2+d_2^2+2d_1d_2=18^2$$

Площадь ромба S = $\frac{d_1d_2}{2}=32$.

Ответ. 32 см^2.

Задача 8. Площадь треугольника АВС равна 1. На сторонах АВ, ВС, СА, взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1 так что $AA_1:A_1B$ = 1:2, $BB_1:B_1C$ = 1:3, точка C_1 делит сторону АС пополам. Найти площадь треугольника $A_1B_1C_1$.



Решение. $S\Delta AA_1C_1=\frac{1}{2}AA_1*AC_1\sin A=\frac{1}{2}\frac{AB}{3}\frac{AC}{2}\sin A=\frac{1}{6}(\frac{1}{2}AB\ AC\sin A)=\frac{1}{6}S\Delta ABC=\frac{1}{6}$. Аналогично, $S\Delta A_1BB_1=\frac{1}{6}$; $S\Delta BCC_1=\frac{3}{8}$.

$$S\Delta A_1B_1C_1=S\Delta ABC-(S\Delta AA_1C_1+S\Delta A_1BB_1+S\Delta B_1CC_1)=$$

$$=1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{24}.$$

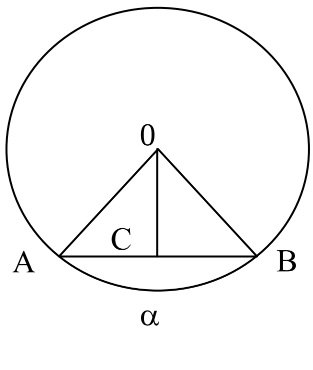
Ответ. $\frac{7}{24}$.

Задача 9. В круге радиусом r проведена хорда длиной a ($0<a<2r$). Найти площадь образовавшегося сегмента.

Решение. $\angle AOB=\alpha$, $AO=OB=r$. $S_{сегмента}\ AOB=S_{сектора}\ OAB-S\ \Delta\ AOB=\frac{r^2}{2}(\alpha-\sin\alpha)$.

$OC\perp AB$, $\angle AOC=\angle COB=\frac{\alpha}{2}$, т.к. Δ AOB – равнобедренный

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{2r},\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\frac{a^2}{4r^2}}=\frac{\sqrt{4r^2-a^2}}{2r};$$



$$\sin\alpha=2\sin\alpha/2\cos\alpha/2=\frac{a\sqrt{4r^2-a^2}}{2r^2}.$$

$$\frac{\alpha}{2}=\arcsin\frac{a}{2r};\ \alpha=2\arcsin\frac{a}{2r}$$

Ответ. $S_{сегмента}=$

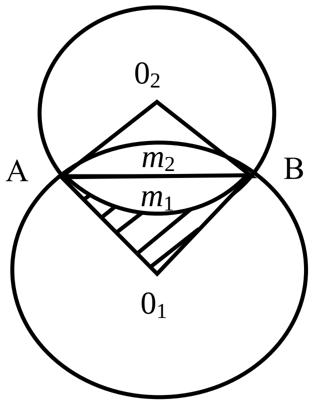
$$\frac{r^2}{2}\left(2\arcsin\frac{a}{2r}-\frac{a\sqrt{4r^2-a^2}}{2r^2}\right).$$

Задача 10. Шесть равных окружностей расположены так, что каждая касается двух других и все шесть точек касания лежат на окружности радиусом 1. Найти площадь части большого круга лежащего вне малых окружностей.

Решение. Справедливо формула

$$a_n = 2R \sin 180^0/a,$$

где a_n – сторона правильного n-угольника, R – радиус описанной около него окружности.



Рассмотрим большой круг. Точка 0_1 – центр круга. $R = 1$ $\angle A0_1B = \alpha = 2\pi/6 = \pi/3$. Sсегмента A$m_1$B=1/2 R^2 ($\alpha - \sin\alpha$) =

$$=1/2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

AB = $\underline{a}_6$ – сторона правильного вписанного шестиугольника в большую окружность. $a_6 = R = 1$.

Рассмотрим малый круг. Точка 0_2 – центр круга.

$\angle 0_2A0_1 = \angle 0_2B0_1 = \pi/2$ (радиус перпендикулярен касательной в точке касания).

$\angle A0_1B = 2\pi/6 = \pi/3$, следовательно, $\angle A0_2B = 2\pi - \pi - \pi/3 = 2\pi/3$, следовательно, AB – сторона правильного треугольника, вписанного в малый круг. R_1 – радиус круга.

AB = $2R_1\sin \pi/3$;$1 = 2R_1\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $R_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Sсегмента Am_2B = $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\pi}{9}-\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

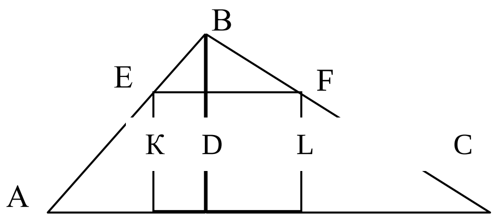
S – искомая площадь. S = 6S_1 (S_1 заштрихована на чертеже).

S = Sбольшого круга – 6Sсегмента Am_1B – 6Sсегмента Am_2B =

$$= \pi-6\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-6\left(\frac{\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{12}\right)=\frac{2}{3}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$$

Ответ. $\dfrac{2}{3}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$.

Задача 11. В треугольник, основание которого равно a, высота равна h, вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а две другие – на боковых сторонах. Вычислить сторону квадрата.



Решение. EFKL – квадрат; BD ⊥ AC; AC = a; BD = h.

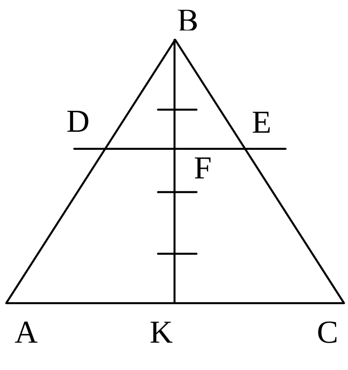
Δ EBF ~ Δ ABC, т.к. EF ││ AC, следовательно

$$\frac{EF}{AC}=\frac{BM}{BD}.$$

EF = x, BM = $h - x\dfrac{x}{a}=\dfrac{h-x}{h}$ $x=\dfrac{ah}{a+h}$

Ответ. $\dfrac{ah}{a+h}$.

Задача 12. Основание треугольника равно 75, боковые стороны равны 65 см и 70 см. Высота разделена в отношении 2:3, считается от вершины, и через точку деления проведена прямая, параллельная основанию. Определить площадь получившейся при этом трапеции.



Решение. ΔDBE ~ ΔABC, т.к. DE ││AC.

$\dfrac{S\Delta DBE}{S\Delta ABC}=\left(\dfrac{BF}{BK}\right)^2=\left(\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{4}{25}$, следовательно, S ΔDBE = $\dfrac{4}{25}$S ΔABC.

Sтрапеции ADEC = S ΔABC -S ΔDBE = $\dfrac{21}{25}$S ΔABC.

Площадь треугольника найдем по трем сторонам (формула Герона).

S ΔABC = $\sqrt{105*30*40*35}=\sqrt{5^4*7^2*3^2*2^4}=$

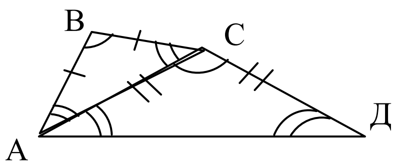
$= 25 * 7 * 3 * 4 = 2100.$

S трапеции ADEC = $\frac{21}{25} * 25 * 7 * 3 * 4 = 1764.$

Ответ. 1764 см^2.

Задача 13. В четырехугольнике АВСД сторона АВ равна стороне ВС, диагональ АС равна стороне СД, ∠ АВС = ∠ АСД. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники АВС и АСД, относятся как 3:4. Найти отношение площадей этих треугольников.

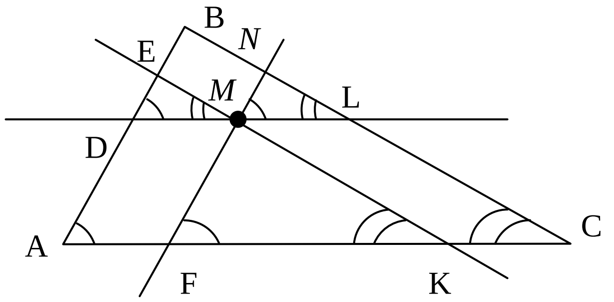
Решение. ΔАВС и ΔАСД – равнобедренные. ∠АВС = ∠АСД по условию, следовательно, ∠ВАС = ∠САД. Δ АВС ~ ΔАСД по двум углам.



$$\frac{S\Delta\Delta AB}{S\Delta\Delta AC} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

Ответ. 9:16.

Задача 14. Через точку, лежащую внутри треугольника АВС, проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника. Площади получившихся маленьких треугольников равны S_1, S_2 и S_3. Найти площадь треугольника АВС.



Решение. DL || AC, EK || BC, *N*F || AB, следовательно ΔDML ~ ΔFMK ~ Δ MNL ~ Δ ABC.

Пусть AF = DM = *a*, FK = *b*, ML = KC = c, S ΔABC = S, SΔDEM = S_1, SΔMFK = S_2, SΔMNL = S_3

$$\begin{cases} \frac{S_1}{S} = \left(\frac{a}{a+b+c}\right)^2, \\ \frac{S_2}{S} = \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^2, \\ \frac{S_3}{S} = \left(\frac{c}{a+b+c}\right)^2, \end{cases} \quad + \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{a}{a+b+c}, \\ \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{b}{a+b+c}, \\ \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{c}{a+b+c}, \end{cases}$$

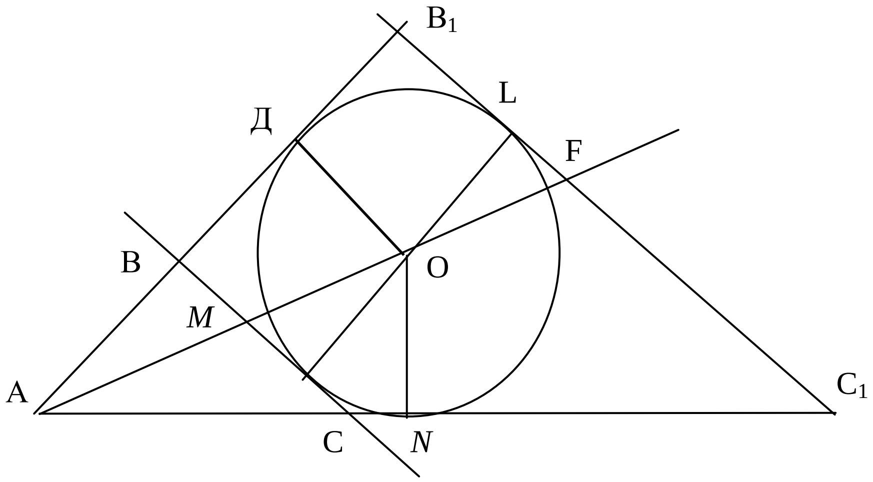
$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$$

$$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$$

Ответ. $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

Задача 15. В угол величиной 60° и вершиной А вписана окружность с центром в точке О. Касательная ВС к этой окружности делит отрезок АО точкой М в отношении АМ:МО = 2:3. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник АВС, если ВС = 7.



Решение. Проведем касательную$B_1C_1 \parallel BC$. P_1 – периметр ΔABC; P_2 – периметр ΔAB_1C_1. АД = АN, ВД = ВК, КС = СN, NС$_1$ = С$_1$L, ДВ$_1$ = В$_1$L, как касательные, проведенные к окружности из одной точки. ДВ + СN = ВСNС$_1$ + ДВ$_1$ = В$_1$С$_1$

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AM}{AF} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad B_1C_1 = 7 \cdot 4 = 28 \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{4}$$

А0 – биссектриса, т.к. окружность вписана в угол B_1AC_1, $\angle$ ДА0 = 30^0, r – радиус окружности.

Из ΔDAO получим АД = r ctg $30^0 = r\sqrt{3}$.

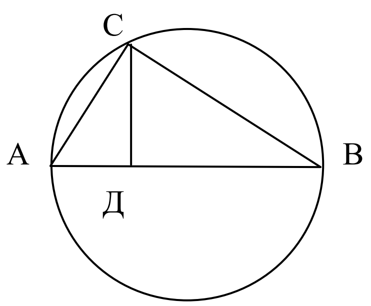
$$P_1 = 2r\sqrt{3}$$

$$P_2 = 2r\sqrt{3} + 2\, B_1C_1 - 2r\sqrt{3} + 56$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{2r\sqrt{3}}{2r\sqrt{3}+56} = \frac{1}{4} \quad r = \frac{7\sqrt{3}}{9}.$$

Ответ. $r = \frac{7\sqrt{3}}{9}$.

Задача 16. Определить хорду АС, если диаметр окружности АВ равен 2 см, а проекция хорды на диаметр равна 0,5 см.



Решение. ΔACB – прямоугольный, т.к. $\angle$ C = 90^0 как опирающийся на диаметр.

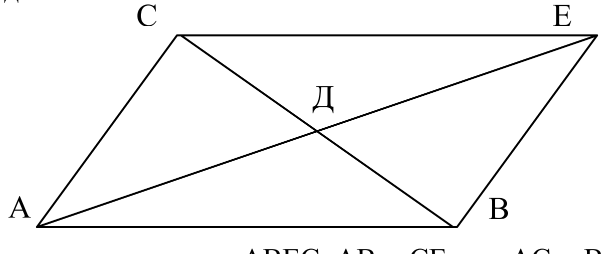
Катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией катета на гипотенузу, т.е.

$$AC^2 = BA * AД = 2 * 0{,}5 = 1$$

$$AC = 1$$

Ответ. 1 см.

Задача 17. По трем сторонам треугольника а, b и с найти длины его медиан.



Решение. Достроим треугольник АВС до параллелограмма АВЕС. АВ = СЕ = a, АС = ВЕ = b, ВС = c.

Точка Д как середина отрезка СВ принадлежит диагонали АЕ. В параллелограмме сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей. АЕ = $2m_a$.

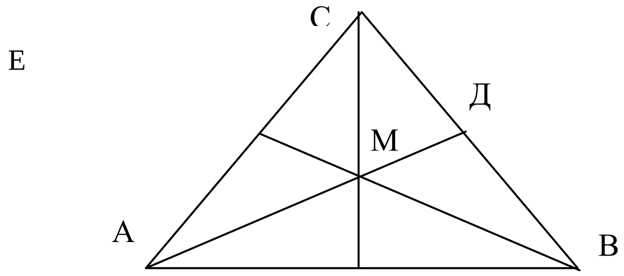
$$2b^2 + 2c^2 = a^2 + 4\, m_a^2$$

Откуда $m_a = \dfrac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$.

Аналогично получим $m_c = \dfrac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$;

$$m_b = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2}.$$

Задача 18. Основание треугольника равно 10 см, а медианы двух других сторон 9 см и 12 см соответственно. Найти площадь треугольника.



Решение. Точка пересечения медиан делит медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

$$\frac{\text{AM}}{\text{MD}} = \frac{2}{1}\ \text{AM} = \frac{2}{3} *2 = 6 \text{ (см)};$$

$$\frac{\text{BM}}{\text{ME}} = \frac{2}{1}\ \text{BM} = \frac{12}{3} *2 = 8 \text{ (см)}.$$

Треугольник AMB – прямоугольный, т.к. $\text{AM}^2 + \text{MB}^2 = \text{AB}^2$ (36 + 64 = 100).

$$\text{S}\Delta\text{AMB} = \frac{\text{AM} \cdot \text{MB}}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 (\text{см}^2).$$

Медианы треугольника разделяют его на шесть равновеликих треугольников.

$$\text{S}\Delta\text{ABC} = 3\text{S}\Delta\text{AMB} = 3 \cdot 24 = 72 \text{ (см}^2).$$

Ответ. 72 см^2.

Задача 19. Найти отношение суммы квадратов медиан треугольника к сумме квадратов его сторон.

Решение.

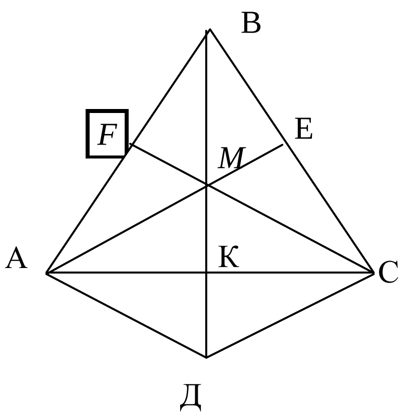
$$+ \quad \begin{cases} 4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2, \\ 4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2, \\ 4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2. \end{cases}$$

$$4\,(m_a^2 + m_b^2 + \underline{m}_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}$$

Ответ. 3 : 4.

Задача 20. Медианы треугольника 3 см, 4 см и 5 см. Найти площадь треугольника.



Решение. Достроим ΔAMC до параллелограмма AMCД.

AM = 2/3 AE = 2/3 * 3 = 2

MK = KД = 1/3 BK.

MД = 2/3 BK = 2/3 * 5 = 10/3

AД = MC = 2/3 CF = 2/3 * 5 = 18/3

Найдем площадь ΔAMД, ΔAMД – прямоугольный, т.к.

$$AM^2 + AД^2 = MД^2$$

$$\left(4+\frac{64}{9}=\frac{100}{9}\right)$$

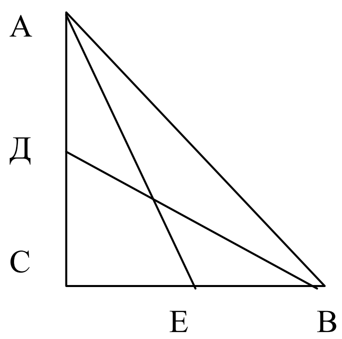
$$S\ \Delta AMД = \frac{AM\cdot AД}{2}=\frac{2\cdot 8}{3\cdot 2}=\frac{8}{3}.$$

S ΔAMK = S ΔAKД, т.к. диагонали параллелограмма делят параллелограмм на четыре равновеликих части.

S ΔABC = 6 S ΔAMK = $\frac{4}{3}6=8(cm^2)$.

Ответ. 8 см^2.

Задача 21. Найти гипотенузу прямоугольного треугольника, если медианы его острых углов равны $\sqrt{601}$ и $\sqrt{244}$.



Решение. Обозначим CB = a, AC = b. CE = ½ a, CД = ½ b, т.к. ДB и AE – медианы. ΔACE и ΔCBD – прямоугольные.

Δ ACE и Δ CДB –

По теореме Пифагора имеем:

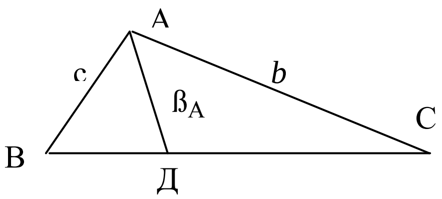
$$+\begin{cases} b^2+\dfrac{a^2}{4}=601 \\ a^2+\dfrac{b^2}{4}=241 \end{cases}$$

$$\frac{5}{4}\left(a^2+b^2\right)=845;$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=26.$$

Ответ. 26.

Задача 22. В треугольнике ABC даны две стороны b и c и угол A между ними. Найти длину биссектрисы угла A.



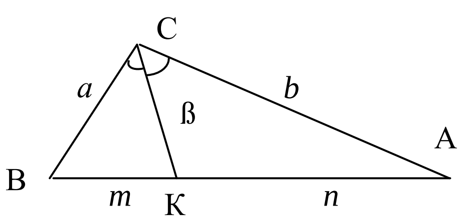
Решение. AД = ß$_A$ – биссектриса. SΔABC = SΔBAД + SΔAДC.

$$\frac{cb\sin A}{2}=\frac{c\beta_A\sin\frac{A}{2}}{2}+\frac{b\beta_A\sin\frac{A}{2}}{2}$$

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\quad \beta_A=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

Ответ. $\dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$.

Задача 23. Доказать, что квадрат биссектрисы, проведенной через вершину треугольника, равен произведению боковых сторон без произведения отрезков основания. ($\beta^2 = ab - mn$)



Решение. Пусть ∠CKB = α, тогда ∠CKA = 180^0 – α. cos(180^0 – α) = -cos α. По теореме косинусов имеем:

ΔBCK : a^2 = ß^2 + m^2 – 2 ß m cos α n + ΔKCA : b^2 = ß^2 + n^2 – 2 ß n cos (180^0 – α) m

$na^2 + mb^2 = n$ ß^2 + nm^2 + m ß^2 + mn^2 = $(m + n)$ (ß^2 + mn)

Биссектриса делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, поэтому

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}, \quad a = \frac{mb}{n}, \quad b = \frac{na}{m}$$

$$na^2 + mb^2 = na\frac{mb}{n} + mb\frac{na}{m} = ab(m+n).$$

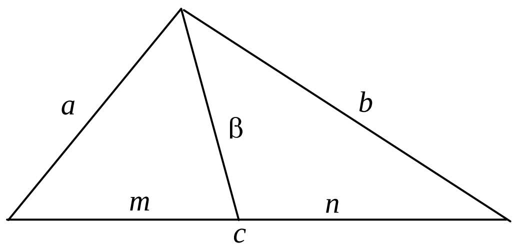
Получим

$$ab(m+n) = (m+n)(\beta^2 + mn)$$

$$\beta^2 = ab - mn.$$

Ответ. $\beta^2 = ab - mn.$

Задача 24. По трем сторонам треугольника а, *b* и с найти длины его биссектрис.



Решение. $m + n = c\ \frac{m}{n} = \frac{a}{b}$, следовательно $m = \frac{ac}{a+b}, n = \frac{bc}{a+b}$.

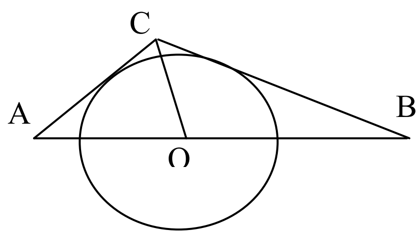
Используем результат предыдущей задачи. Получим:

$$\beta^2 = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2}\ a + b + c = 2p;\ a + b - c = 2p - 2c$$

$$\beta_c = \frac{\sqrt{ab(a\text{-}b)^2 - c^2}}{a+b} = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b} = \frac{2\sqrt{p(p-c)ab}}{a+b}$$

Ответ. $\beta_c = \frac{\sqrt{ab(a\text{-}b)^2 - c^2}}{a+b} == \frac{2\sqrt{p(p-c)ab}}{a+b}$.

Задача 25. В треугольнике со сторонами а, *b* и с проведена полуокружность с центром на стороне с, касающаяся двух других сторон. Найти отрезки, на которые сторона с делится центром полуокружности.



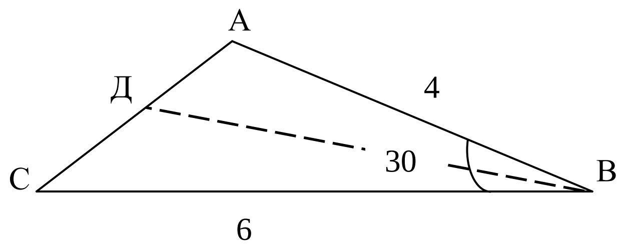
Решение. Полуокружность вписана в ΔABC, следовательно её центр лежит на биссектрисе СО угла АСВ. По свойству биссектрисы:

$$\frac{AO}{OB} = \frac{AC}{CB},$$

следовательно, $AO = \frac{ac}{a+b}, OB = \frac{bc}{a+b}$.

Ответ. $AO = \frac{ac}{a+b}, OB = \frac{bc}{a+b}$.

Задача 26. В треугольнике АВС угол В = 30^0, АВ = 4, ВС = 6. Биссектриса угла В пересекает сторону АС в точке Д. Определить площадь треугольника АВД.



Решение. Т.к. ΔАВД и ΔАВС имеет общую высоту, проведенную из вершины В, то

$$\frac{\text{S}\Delta\Delta\text{AB}}{\text{S}\Delta\Delta\text{AB}} = \frac{\text{АД}}{\text{АС}}$$

$$\text{S}\Delta\Delta\text{AB} = \frac{\text{AC}\cdot\text{BC}}{2}\sin\text{B} = \frac{4\cdot 6}{2}\ \frac{1}{2} = 6\,.$$

По свойству биссектрисы угла треугольника имеем

$$\frac{\text{АД}}{\text{ДС}} = \frac{\text{AB}}{\text{BC}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}\,;\ \frac{\text{АД}}{\text{AC}} = \frac{2}{5}$$

$$\text{S}\Delta\text{АВД} = 2/5\ \text{S}\Delta\text{ABC} = 2/5\cdot 6 = 2{,}4\ (\text{см}^2).$$

Ответ. 2,4 см^2.

Задача 27. У треугольника две стороны 20 см и 21 см, а синус угла между ними равен 0,6. Найти третью сторону.

Решение. Применим теорему косинусов.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\text{C}.$$

$$a = 20,\ b = 21,\ \sin\text{C} = 0{,}6$$

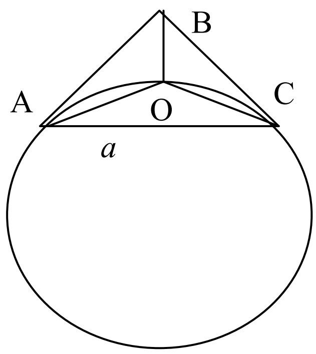
$$\cos\text{C} = \pm\sqrt{1-\sin^2 C} = \pm\sqrt{1-0{,}36} = \pm 0{,}8.$$

$$c^2 = 20^2 + 21^2 \pm 0{,}8 * 2 * 20 * 21$$

$$c_1 = 13 c_2 = \sqrt{1513}.$$

Ответ. 13, $\sqrt{1513}$.

Задача 28. Дан треугольник, длина основания которого равна a, а угол при вершине α. Построена окружность, проходящая через центр вписанного в этот треугольник круга и концы основания треугольника. Найти радиус окружности



Решение. Точка О – центр вписанной окружности в треугольник АВС, следовательно АО и ОС – биссектрисы углов А и С треугольника.

$\angle$BAC + $\angle$BCA = 180^0 – α; $\angle$AOC + $\angle$OCA = 90^0 – α/2

$\angle$AOC = 180^0 – (90^0 – α/2) = 90^0 + α/2

Рассмотрим ΔАОС. Применим теорему синусов.

$$\frac{a}{\sin\left(90^0+\alpha/2\right)} = 2R,\ \frac{a}{\cos\alpha/2} = 2R,\ R = \frac{a}{2\cos\alpha/2}.$$

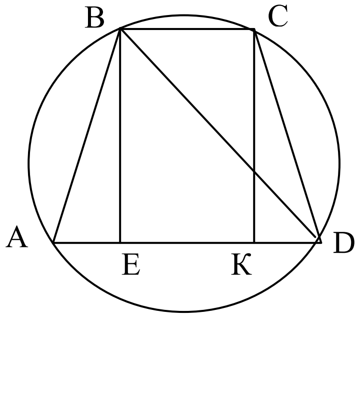
Ответ. $\dfrac{a}{2\cos\alpha/2}$.

Задача 29. Около равнобедренной трапеции, основания которой 6 см и 8 см, а высота 7 см, описан круг. Найти площадь этого круга.

Решение. Треугольник ABD вписан в круг. BE $\perp$ AD, BE – высота трапеции.

$$R = \frac{abc}{4S},$$

где R – радиус описанной окружности около ΔABD, *а, в, с* – его стороны, S – площадь.



$$SABD = \frac{AD*BE}{2} = \frac{8*7}{2} = 28$$

AE = KD, т.к. трапеция равнобедренная. $AE = \dfrac{AD-BC}{2} = \dfrac{8-6}{2} = 1$По теореме Пифагора имеем:

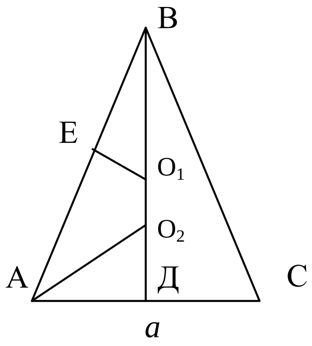
$$AB = \sqrt{AE^2+BE^2} = \sqrt{1+49} = 5\sqrt{2}$$

$$BD = \sqrt{ED^2+BE^2} = \sqrt{49+49} = 7\sqrt{2}$$

$$R=\frac{5\sqrt{2}\cdot 7\sqrt{2}*8}{4*28}=5(\text{см}).$$

Ответ. 25π см^2.

Задача 30. Дан равнобедренный треугольник с основанием a и острым углом при основании α. Найти радиус вписанной и описанной около треугольника окружности.



Решение. ВД $\perp$ АС. Так как ΔАВС равнобедренный, то ВД – высота и медиана, следовательно $АД=\frac{AC}{2}=\frac{a}{2}$. Центр вписанной окружности O_1 лежит на пересечении биссектрис, следовательно $АO_1$ – биссектриса $\angle O_1АД=\alpha/2$.

АС – касательная к этой окружности, $O_1Д \perp$ АС, следовательно, $O_1Д=r$ (радиус вписанной окружности).

Из $\Delta АO_1Д$имеем $r=\frac{a}{2}\mathrm{tg}\,\alpha/2$.

Центр описанной окружности O_2 лежит на пересечении серединных перпендикуляров, следовательно $EO_2 \perp$ АВ.

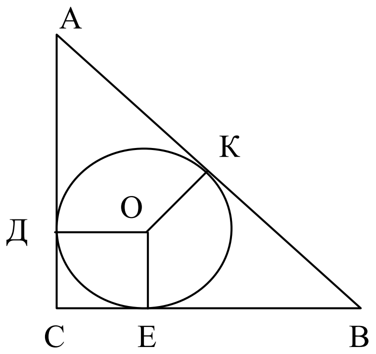
ВЕ = (1/2)АВ. $\angle BO_2E=\angle BAC$ как углы с соответственно перпендикулярными сторонами.

Из ΔАВД : $AB=\frac{a}{2\cos\alpha},\ BE=\frac{a}{4\cos\alpha}$.

Из ΔEO_2B :О $O_2B=R=\frac{BE}{\sin\alpha}=\frac{a}{4\cos\alpha\sin\alpha}=\frac{a}{2\sin 2\alpha}$.

Ответ. $r=\frac{a\mathrm{tg}\,\alpha/2}{2}$ $R=\frac{a}{2\sin 2\alpha}$.

Задача 31. Доказать, что сумма катетов прямоугольного треугольника равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей.



Решение. Пусть ВС = a, АС = b, d – диаметр вписанной окружности. Д – диаметр описанной окружности. ОД, ОЕ – радиусы вписанной окружности. ОД = ОЕ = r. В ОД $\perp$ АС, ОЕ $\perp$ СВ, т.к. радиусы перпендикулярны касательной в точке касания. $\angle ACB=90°$ по условию, следовательно ОДСЕ – квадрат.

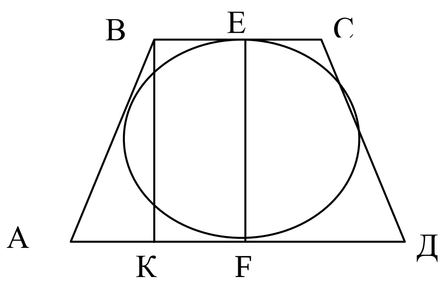
АВ = Д, т. к. $\angle ACB=90°$. ЕВ = ВК, ДА = АК, как касательные, проведенные к окружности из одной точки.

ЕВ + АД = АВ; ЕВ = $a-r$; АД = $b-r$.

$a-r+b-r=Д$; $a+b=d+Д$

что и требовалось доказать.

Задача 32. В равнобедренную трапецию, основания которой равны a и b, вписана окружность. Найти её диаметр.



Решение. ВС || АД. EF – диаметр EF $\perp$ ВС, EF $\perp$ ВС, т.к. EF – диаметр. ВК $\perp$ АВ, следовательно, EF || ВК, EF = ВК (отрезки параллельных, заключенных между параллельными, равны).

ВС = b, АД = a, АВ = СД = c.

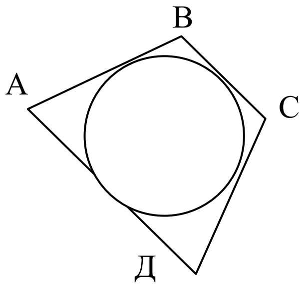
Так как в трапецию вписана окружность, то АВ + СД = ВС + АД;

$$2c=a+b,\ c=\frac{a+b}{2};\ AK=\frac{a-b}{2};$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}.$$

Ответ. $d = \sqrt{ab}.$

Задача 33. В четырехугольник, противоположные стороны которого равны 2 см и 4 см, вписана окружность радиусом 1,2 см. Определить площадь четырехугольника.



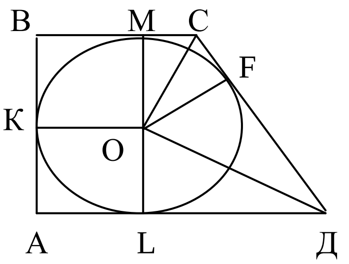
Решение. Так как в четырехугольник вписана окружность, то АВ + СД = ВС + АД. S – площадь четырехугольника. *r*– радиус вписанной окружности, р – полупериметр.

$S = pr$. $P = 6$, $r = 1{,}2$

$S = 6 * 1{,}2 = 7{,}2$ (см^2).

Ответ. 7,2 см^2.

Задача 34. Прямоугольная трапеция описана около окружности. Найти радиус окружности, если длины оснований трапеции равны *a* и *b*.



Решение. О – центр вписанной окружности в трапецию, *r* – радиус окружности. Следовательно, СО и ОД – биссектрисы ее углов. ∠ ВСД + ∠ АДС = 180°, следовательно ∠ОСД + ∠ СДО = 180°/2, т.к. биссектриса делит угол пополам. ∠ СОД = 90°.

АKOL – квадрат, т.к. KO = OL = *r*. ∠ ОКА = ∠ OLA = ∠ KAL = 90°, т.к. радиус перпендикулярен касательной в точке касания.

BM = *r*; MC = *a* – *r*; AL = *r*;

LД = *b* – *r*

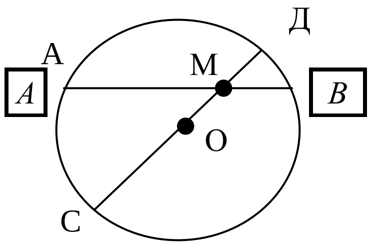
LД = ДF, MC = CF как касательные, проведенные к окружности из одной точки. OF = *r* (радиус перпендикулярен к касательной в точке касания), OF ⊥ СД, следовательно, ΔСОД – прямоугольный.

$OF^2 = CF * FД$ $r^2 = (a - r)(b - r)$;

$$r = \frac{ab}{a+b}$$

Ответ. $r = \frac{ab}{a+b}$.

Задача 35. Внутри круга, радиус которого равен 13 см, дана точка М, отстоящая от центра круга на 5 см. Через точку М проведена хорда АВ = 25 см. Определить длину отрезков, на которые хорда АВ делится точкой М.



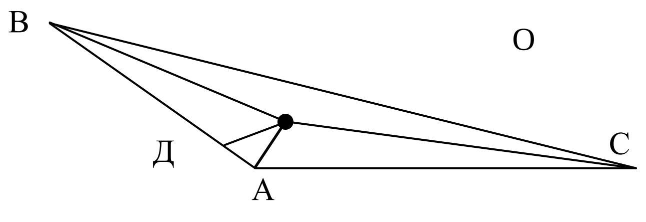
Решение. ОС – радиус. ОС = 13. ОМ = 5 см. Обозначим МВ = х, тогда АМ = 25 – *x*. АМ * МВ = МД * МС, т.к. произведе B
отрезков хорд равны.

$(25 - x)\, x = 18 * 8$

$x_1 = 16$, $x_2 = 9$.

Ответ. 16 см и 9 см.

Задача 36. В треугольнике АВС АВ = 3, АС = 5, ∠ ВАС = 120^0. О – центр вписанной окружности. Найти ВО.



Решение. По теореме косинусов имеем $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB * AC \cos 120°$

$$BC^2 = 9 + 25 + 2 * 3 * 5 * ½ = 49 BC = 7.$$

ОД = r – радиус вписанной окружности.

$$r = \frac{S}{P},$$

где S – площадь треугольника, p – полупериметр.

$$r = \frac{3*5\sin 120°*2}{2(3+5+7)} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из ΔОДА: ∠ОАД = $120^0/2 = 60^0$, т.к. ОА – биссектриса (центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис). ∠ОДА = 90°, следовательно ∠ АОД = 30°

$$АД = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{tg}30° = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2}.$$

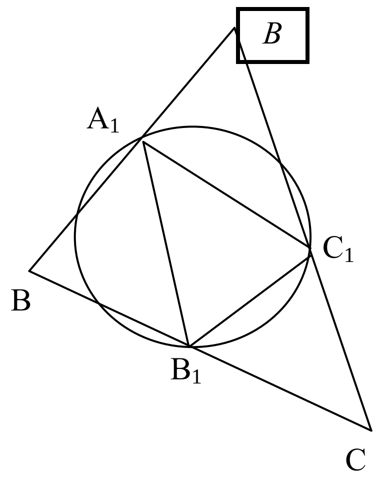
Из ΔВДО по теореме Пифагора имеем

$$OB^2 = ВД^2 + ОД^2;$$

$$OB^2 = \left(3 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2; \text{ OB} = \sqrt{7}.$$

Ответ. $\sqrt{7}.$

Задача 37. Стороны треугольника 13 см, 14 см, 15 см. Найти радиус окружности, проведенной через середины стороны треугольника.



Решение. АВ = 13 см, ВС = 14 см, АС = 15 см. Треугольник $A_1B_1C_1$ вписан в окружность. A_1B_1, A_1C_1 и C_1B_1 – средние линии треугольника АВС, следовательно, $A_1B_1 = 13/2$, $B_1C_1 = 7$, $A_1C_1 = 15/2$. Площадь треугольника $A_1B_1C_1$ найдем по формуле Герона.

SΔ $A_1B_1C_1$ =

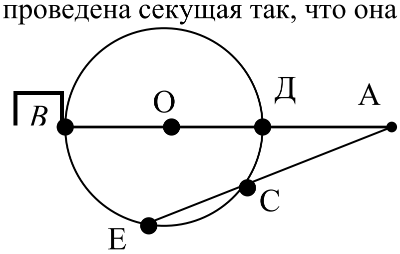
$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{21}{2}3\frac{7}{2}4} = 21.$$

R – радиус описанной окружности; *а, в, с* – стороны треугольника, S – площадь.

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{13/2 * 7 * 15/2}{4 * 21} = \frac{65}{16} = 4\frac{1}{16} = 4{,}0625 (см).$$

Ответ. 4,0625 см.

Задача 38. Радиус окружности равен 7 см. Из точки удаленной от центра на расстояние 9 см, проведена секущая так, что она делится окружностью пополам. Определить длину этой секущей.



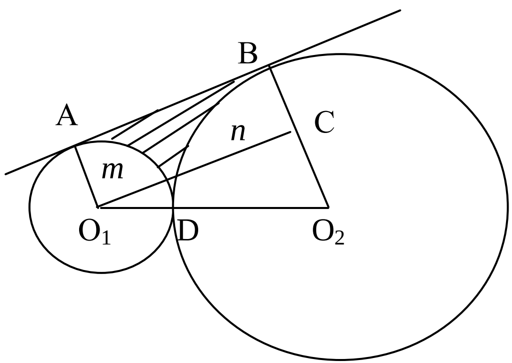
Решение. Справедлива теорема: если из одной точки к окружности проведены секущая и касательная, то произведение секущей на ее внешнюю часть есть величина постоянная, равная квадрату касательной.

$$AB * АД = AE * AC; AC = x; AE = 2x;$$

$$16 * 2 = 2x^2; x = 4. AE = 2x = 8 \text{ (см)}.$$

Ответ. 8 см.

Задача 39. Две окружности с радиусами r и $3r$ внешне касаются. Найти площадь фигуры, заключенной между окружностями и их общей внешней касательной.



Решение. Искомая пло-щадь S. S = S трапеции O_1ABO_2 – S'сектора $AO_1Д$ – S"сектораДO_2B.

Проведем $O_1C \parallel AB$. $\angle ABO_2 = 90°$, т.к. радиус перпендикулярен касательной в точке касания. $\angle O_1CO_2 = 90°$.

$$CO_2 = 3r - r = 2r O_1O_2 = 4r$$

$$\angle\ O_1O_2C = \alpha \cos\alpha = \frac{2r}{4r} = \frac{1}{2}\ \alpha = 60^0.$$

$\angle A\ O_1O_2=120^0$,O_1C – высота трапеции.

$$O_1C = 4r \sin 60^0 = 4r\frac{\sqrt{3}}{2} = 2r\sqrt{3}.$$

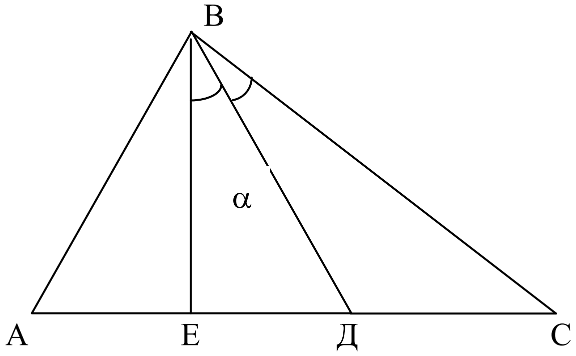
Sтрап. = $\dfrac{r+3r}{2} 2r\sqrt{3} = 4r\sqrt{3}.$

Sсектора $BO_2Д=\dfrac{\pi * 9r^2}{6} = \dfrac{3\pi r^2}{2}$; Sсектора $AO_1Д = \dfrac{\pi r^2}{3}$.

$S = 4r^2\sqrt{3} - \dfrac{3\pi r^2}{2} - \dfrac{\pi r^2}{3} = r^2\left(4\sqrt{3} - \dfrac{11\pi}{3}\right).$

Ответ. $r^2\left(4\sqrt{3} - \dfrac{11\pi}{3}\right).$

Задача 40. Высота треугольника, равная 6 см, делит угол треугольника в отношении 1 : 2, а основание треугольника на части, меньшая из которых равна 3 см. Найти радиус описанной окружности.



Решение. По теореме Пифагора:

$$AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = \sqrt{36+9} = 3\sqrt{5}\ .$$

Проведем ВД – биссектрису угла ЕВС. По свойству биссектрис имеем:

$$\frac{ЕД}{ДС} = \frac{BE}{BC}.$$

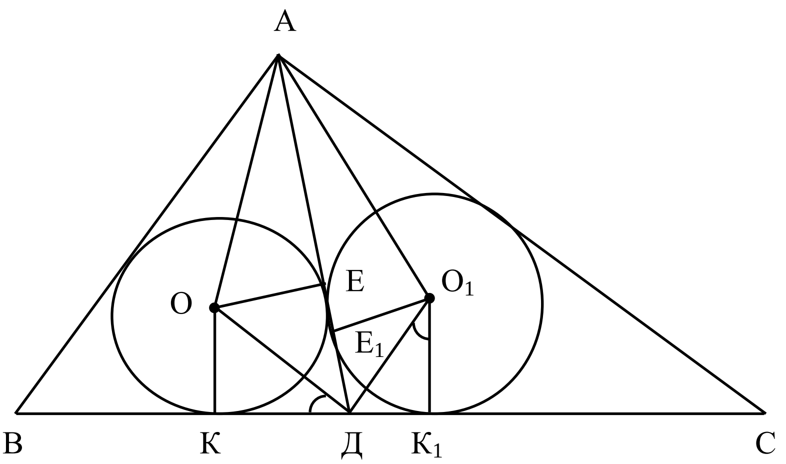
Пусть ДС = x, тогда ВС = $\sqrt{36+(x+3)^2}$

$$\frac{3}{x} = \frac{6}{\sqrt{36+(x+3)^2}}\ ;\ x = 5;\ AC = 11;\ BC = 10.$$

$$R = \frac{abc}{2S} = \frac{11*3\sqrt{5}*10}{4\frac{11*6}{2}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ. $R = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}.$

Задача 41. В углы В и С треугольника АВС вписаны две окружности радиусами 2 см и 3 см, касающиеся биссектрисы угла А треугольника. Найти эту биссектрису, если расстояние между точками, в которых окружности касаются ВС, равно 7 см.



Решение. $\angle$ ОДО$_1$ = 90°, т.к. ОД и О$_1$Д – биссектрисы. $\angle$ КДО + $\angle$ КОД = 90°, т.к. ОК $\perp$ ВС, $\angle$ К$_1$ОД + $\angle$ О$_1$ДК$_1$ = 90°, т.к. О$_1$К$_1$ $\perp$ ВС. $\angle$ КОД = $\angle$ДО$_1$К$_1$, ΔКОД ~ ΔК$_1$ОД как прямоугольные и имеющие равные острые углы. КД = x, тогда ДК$_1$ = 7 – x.

$$\frac{x}{2}=\frac{3}{7-x};\ x_1 = 1;\ x_2 = 6.$$

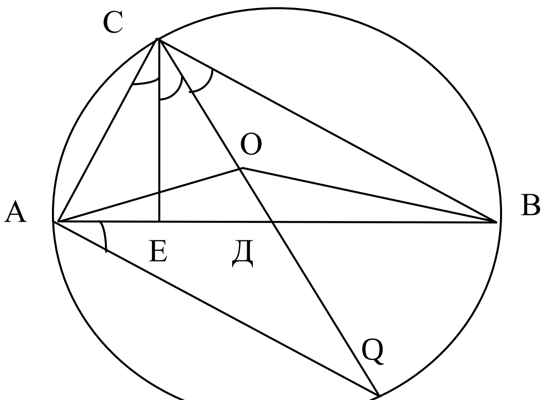
$\angle$ВАД = $\angle$ САД, т.к. АД – биссектриса. $\angle$ ЕАО$_1$ = $\angle$ ЕАО , т.к. ОА и АО$_1$ – биссектрисы (центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис), следовательно, ΔАОЕ ~ ΔАО$_1$Е$_1$.

1) x = 6. Пусть АД = β $\frac{\beta-6}{2}=\frac{\beta-1}{3}\Rightarrow$ β = 16;

2) x = 1. $\frac{\beta-1}{2}=\frac{\beta-6}{3}\Rightarrow \beta < 0$.

Ответ. 16.

Задача 42. Медиана и высота треугольника, проведенные из одной вершины угла треугольника, делят этот угол на три равные части. Доказать, что треугольник прямоугольный.



Решение. СЕ – высота, СД – медиана. ∠АСЕ = ∠ЕСД = ∠ ДСВ = α. Пусть ΔАСВ вписан в окружность. Продолжим СД до пересечения с окружностью в точке Q. **∠QCB = ∠ QAB, т.к. опирается на одну и ту же дугу QB. ∠CAE = 90° – α, следовательно, ∠CAQ = 90°. CQ – диаметр. Центр окружности принадлежит диаметру CQ.**

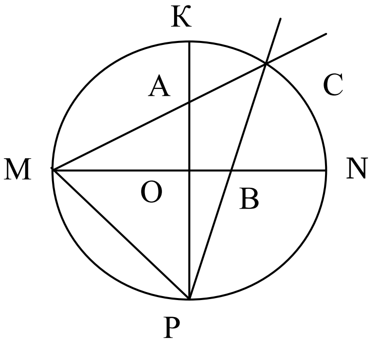
Докажем, что точка Д – центр окружности. Допустим, что центр окружности точка О. ΔАОВ – равнобедренный, т.к. АО = ОВ = R, ОД – медиана, следовательно, СД – высота, что противоречит условию. Следовательно, АВ – диаметр, ∠АСВ = 90^{0,} т.к. опирается на диаметр.

Задача допускает другое решение. АД = ДВ, т.к. СД – медиана. АЕ = h tgα, ЕВ = h tg 2α. h tg α = h tg 2α, tg α = t > 0, т. к. α – острый угол.

$$3t=\frac{2t}{1-t^2},\ t=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \alpha = 30°.$$

∠АСВ = 3α = 90°, следовательно, АВ – диаметр.

Задача 43. В круге с центром О и радиусом 1 проведены два взаимно перпендикулярных диаметра MN и KP. На радиусе ON взята точка B, так что OB = ON/4, а на радиусе OK взята точка A, так что OA = 0,6 ON. Доказать, что точка пересечения прямых MA и PB расположена на данной окружности.



Решение. Введем систему координат. Ось X направим по прямой ON; ось У – по OK. Точки на рисунке будут иметь следующие координаты: B (0,25; 0); M (-1; 0); P (0; -1); A (0; 0,6).

Составим уравнения прямых MA и PB.

$$MA: \frac{x+1}{0+1} = \frac{y-0}{0,6-0}$$

или 0,6x + 0,6 = y

$$PB: \frac{x-0}{0,25-0} = \frac{y+1}{0+1} \text{ или } x = 0,25y + 0,25.$$

Найдем точку пересечения этих прямых, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,6x + 0,6 = y; \\ x = 0,25\,y + 0,25; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 5y = -3; \\ 4x - y = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 5(4x - 1) = -3; \\ y = 4x - 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 8 / 17; \\ y = 15 / 17. \end{cases}$$

Осталось проверить, что точка C (8 / 17; 15 / 17) лежит на окружности.

$$(8 / 17)^2 + (15 / 17)_2 = 1,$$

что и требовалось доказать.

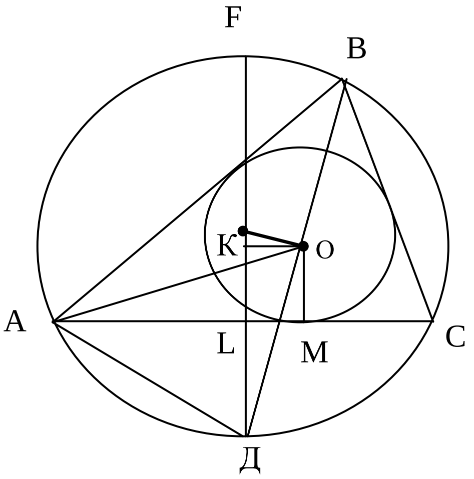
Задача допускает другое решение. ∠CMO = α, ∠CPO = β, tg α = 0,6 = 3/5 tg β = 1/4

$$\text{tg}\,(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\alpha\text{tg}\beta} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{3}{5} * \frac{1}{4}} = 1,$$

α + β = π/4.

Рассмотрим ΔMCP. ∠OMP = ∠OPM = π/4. ∠C = π – π/2 – π/4 = π/4. Точка C принадлежит окружности, т.к. ∠CMP опирается на дугу MP и измеряется ее половиной.

Задача 44. Доказать, что в любом треугольнике радиус R описанной окружности, радиус r вписанной окружности и расстояние между центрами этих окружностей d связаны равенством $d^2 = R^2 - 2Rr$ (формула Эйлера).



Решение. O – центр вписанной окружности. O_1 – центр описанной окружности около ΔABC.

$$O_1O = d.$$

FД – диаметр, FД ⊥ AC, следовательно AL=LC и ∪AД = ∪ДC (диаметр перпендикулярный хорде делит эту хорду и стягивающую её дугу пополам). ∠ABД = ∠ДBC = α как опирающиеся на равные дуги, BД – биссектриса. Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис, следовательно точка O принадлежит BД, AO – биссектриса.

$$\angle CAO = \angle OAB = \beta;$$

∠AOД = α + β как внешний ΔAOB. ∠OAД = α + β, следовательно, AД = OД.

Рассмотрим $\Delta O_1OД$, по теореме косинусов

$$OO_1^2 = O_1Д^2 + OД^2 - 2O_1Д*OД\cos O_1ДO$$

$$OK \perp O_1Д,\ OД \cos O_1ДO = KД.$$

OM – радиус r, следовательно OM ⊥ AC (радиус перпендикулярен касательной в точке касания). KL = OM = r как противоположные стороны прямоугольника.

$$ДK = r + LД$$

$$d^2 = R^2 + OД^2 - 2R(r + LД) = R^2 - 2Rr + OД^2 - 2RLД.$$

ΔAFД прямоугольный, т.к. $\angle$ FAД = 90° как опирающийся на диаметр AL $\perp$ FД, следовательно АД^2 = 2R*LД (катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу).

$$d^2 = R^2 + 2Rr + ОД^2 - АД^2 = R^2 - 2Rr.$$

Итак, $d^2 = R^2 - 2Rr$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. В треугольнике ABC угол BAC равен α. Если этот угол уменьшить в 2 раза, оставив длины сторон AB и AC прежними, то площадь треугольника не изменится. Найти угол α в градусах.

Ответ. α = 120°.

2. Высоты треугольника равны 3 см, 4 см и 5 см. Найти его площадь.

Ответ. $\frac{3600}{\sqrt{128639}}$ см^2.

3. В равнобедренной трапеции с меньшим основанием a = 4 и углом при большем основании α = 60°, расстояние между серединами диагоналей равно d = 2. Найти площадь трапеции.

Ответ. $12\sqrt{3}$.

4. В выпуклом равностороннем пятиугольнике АВСДЕ углы при вершине В и Е прямые. Найти площадь пятиугольника, если его сторона равна 2.

Ответ. $4+\sqrt{7}$.

5. Пусть a, b, с d – длины сторон выпуклого четырехугольника, заданные в порядке обхода, S – его площадь. Доказать, что $S \geq \frac{1}{2}(ac+bd)$.

6. Найти площадь треугольника, вписанного в окружность, если концы его стороны, равной 20 см, отстоят от касательной, проведенной через противолежащую вершину на 25 см и 16 см.

Ответ. 200 см^2.

7. В параллелограмме АВСД проведена диагональ ВД. Точка К делит сторону АВ в отношении АК : КВ = 2 : 1, точка L делит диагональ ВД в отношении BL : LД = 3 : 2. Найти площадь треугольника BKL, если площадь параллелограмма АВСД равна 10 см^2.

Ответ. 1 см^2.

8. В квадрат вписан другой квадрат, вершины которого лежат на сторонах первого, а стороны составляют со сторонами первого квадрата углы по 30° (подразумеваются соответствующие меньшие углы). Какую часть площади данного квадрата составляет площадь вписанного квадрата.

Ответ. $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$.

9. Какую часть площади круга отсекает хорда, стягивающая дугу в α радиан?

Ответ. $\frac{\alpha}{2\pi} - \frac{\sin\alpha}{2\pi}$.

10. Хорда, стягивающая дугу окружности, равна 20 см, а ее стрелка (расстояние от середины дуги до середины хорды) равна 1 см. Найти радиус окружности в сантиметрах.

Ответ. 50,5.

11. В выпуклом четырехугольнике АВСД АВ + ВД $\leq$ АС + СД. Доказать, что АВ $<$ АС.

12. Найти площадь правильного 12-угольника, вписанного в круг с радиусом R.
Ответ. $3R^2$.
13. Какую часть площади треугольника, считая от вершины отсекает его средняя линия?
Ответ. ¼.

14. Высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, равна h, а разность между проекциями катетов на гипотенузу так же равна h. Найти гипотенузу этого треугольника.

Ответ. $h\sqrt{5}$.

15. В треугольник, в котором известны длины двух сторон а и b, вписан ромб, имеющий с треугольником общий угол С. Найти длину стороны ромба.

Ответ. $\frac{ab}{a+b}$.

16. Дана прямоугольная трапеция с основаниями а и b и меньшей боковой стороной с. Определить расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до основания а и до меньшей боковой стороны.

Ответ. $\frac{ac}{a+b}, \frac{ab}{a+b}$.

17. Основание равнобедренного треугольника равно $\sqrt{10}$, а медиана боковой стороны равна 3. Найти длины его боковых сторон.
Ответ. 4.

18. В круг радиусом R вписан треугольник, углы которого равны А и В. Найти длину его медианы, проведенной из вершины С.

Ответ. $R\sqrt{2\sin^2 A + 2\sin^2 B - \sin^2(A+B)}$.

19. Расстояние от точки пересечения медиан треугольника до стороны, длина которой 6 см, равно 2 см. Найти площадь треугольника.
Ответ. 18 см^2.

20. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 8 см и 6 см. Найти длину биссектрисы прямого угла.

Ответ. $\frac{24\sqrt{2}}{7}$ см.

21. Центр вписанной окружности делит высоту равнобедренного треугольника на отрезки 5 и 3, считая от вершины. Определить длины сторон треугольника.
Ответ. 12, 10, 10.

22. В прямоугольном треугольнике с углом в 45^0 найти угол между медианой и биссектрисой, проведенной из вершины острого угла.

Ответ. $-\frac{\pi}{8} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

23. В треугольнике ABC со сторонами AB = 3, BC = 6, AC = 5 проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 до пересечения со сторонами треугольника в точках A_1, B_1, C_1. Найти площадь треугольника $A_1B_1C_1$.

Ответ. $\frac{5}{11}\sqrt{14}$.

24. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга равна 8 см^2. Определить боковую сторону этой трапеции, если тупой угол при основании трапеции равен $\frac{5\pi}{6}$.

Ответ. 4см.

25. Определить длину окружности, описанной около треугольника, два угла которого α и β и высота, опущенная из вершины третьего угла, равна h.

Ответ. $\frac{\pi h}{\sin\alpha\sin\beta}$.

26. Доказать, что если стороны прямоугольного треугольника $a<b<c$ образуют арифметическую прогрессию, то $ac = 6Rr$, где R, r – радиусы описанной и вписанной окружности.

27. В равнобедренную трапецию вписана окружность радиусом $\sqrt{2}$. Точки касания делят боковые стороны в отношении 1 : 4. Найти площадь трапеции.

Ответ. 10.

28. К окружности из точки О проведена касательная длинной 4 и секущая длиной 6, пересекающиеся в точке О под углом 60°. Найти радиус окружности.

Ответ. $\frac{14\sqrt{3}}{9}$.

29. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу в отношении 2 : 3. Найти площадь треугольника, если расстояние от центра окружности до вершины прямого угла равно $2\sqrt{2}$.

Ответ. 24.

30. В треугольник со сторонами $7\sqrt{3}$ и $8\sqrt{3}$ и углом между ними 60° вписан полукруг, диаметр, которого лежит на третьей стороне. Найти его радиус.

Ответ. $\frac{28}{5}$.

31. В прямоугольной трапеции отношение длин диагоналей равно 2, а тангенс острого угла трапеции равен 2/3. Найти отношение большего основания трапеции к меньшему.

Ответ. 4 : 1.

32. В окружности проведены хорды, угол между которыми 30°. Хорды делятся в точке пересечения в отношении 1 : 1 и 2 : 3. Найти радиус окружности, если расстояние от ее центра до точки пересечения хорд равно $\sqrt{7}$.

Ответ. 7.

33. В трапеции АВСД (АВ $||$ ДС) точки P и Q лежат на боковых сторонах АД и ВС соответственно, при этом PQ$||$AB. Площадь трапеции АВСД в 4 раза больше площади трапеции PQСД. Найти длину PQ, если АВ = 7 см, ДС = $\sqrt{5}$ см.

Ответ. 4 см.

34. В трапеции АВСД стороны ВС и АД параллельны, О – точка пересечения диагоналей. Найти площадь трапеции, если площади треугольников АОД и ВОС равны соответственно 36 и 16.

Ответ. 100.

35. Хорда, стягивающая дугу окружности, равна 24. Ее стрелка (расстояние от середины дуги до середины хорды) равна 2. Найти радиус окружности.

Ответ. 37.

36. Около окружности радиусом R = 6см описана равнобедренная трапеция, одно из оснований которой имеет длину равную 4 см. Найти длину другого основания.

Ответ. 36 см.

37. В треугольнике ABC угол A равен 60°, AB = 4. Найти AC, если площадь треугольника $3\sqrt{3}$.

Ответ. 3.

38. Катеты прямоугольного треугольника 3 и 4. Найти длину медианы, проведенной к гипотенузе этого треугольника.

Ответ. 2,5.

39. Максимальное и минимальное расстояния от точки вне окружности до окружности равны 19 и 1. Найти радиус окружности.

Ответ. 9.

40. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности и гипотенуза этого треугольника равны соответственно 2,5 и 25. Найти периметр этого треугольника.

Ответ. 55.

41. В круг с площадью 225π см^2 вписан равнобедренный треугольник с основанием 24 см. Найти площадь треугольника.

Ответ. 72 см^2 или 288см^2 .

42. Через середину одной из сторон квадрата и две его вершины, противоположные указанной стороне, проведена окружность. Найти диаметр этой окружности, если радиус окружности, описанной около квадрата, равен $4\sqrt{2}$.

Ответ. 10.

43. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AQ и CP и через точки P, B Q проведена окружность. Ее радиус $\frac{6}{5}$. Периметры треугольников ABC и PQB равны 10 и 6 соответственно. Найти AC.

Ответ. $\frac{16}{5}$.

44. Длины оснований трапеции 2 и 8. Проведена линия параллельно основанию через точку пересечения диагоналей. Определить длину отрезка этой линии, заключенной между боковыми сторонами.

Ответ. 3,2.

45. В прямоугольный треугольник ABC ($\angle$ C = 90°) вписана окружность радиусом r. На сторону AB проведена высота СД. В треугольники АСД И ДСВ вписаны окружности радиусом r_1 и r_2 соответственно. Доказать, что СД = $r_1 + r_2 + r$.

46. В равнобедренном треугольнике ABC (AB = BC) проведена биссектриса АД. Площади треугольников АВД и АДС равны S_1 и S_2. Найти длину основания.

Ответ. $2\sqrt[4]{\dfrac{S_2^2(S_1+S_2)^2}{(4S_1^2-S_2^2)}}$.

47. В прямоугольном треугольнике острый угол α и расстояние a от вершины другого острого угла до центра вписанного круга. Найти площадь треугольника.

Ответ. $\frac{a^2}{2}\cos\alpha\ \mathrm{ctg}{}^{\alpha}\!/_{2}$.

48. Круг, квадрат и равносторонний треугольник равновелики. Найти отношение их периметров.

Ответ. $\sqrt{\pi}\ :2:\sqrt[4]{27}$.

49. Сторона правильного треугольника равна a. Из его центра радиусом $\frac{a}{3}$ описана окружность. Определить площадь треугольника, лежащего вне этой окружности.

Ответ. $\frac{a^2}{18}(3\sqrt{3}-\pi)$.

Раздел II. СТЕРЕОМЕТРИЯ

ОСНОВНЫЕ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

1. ***Произвольная призма*** ($\boldsymbol{l}$ – боковое ребро; $\boldsymbol{P}$ – периметр основания; $\boldsymbol{S}$ – площадь основания; $\boldsymbol{H}$ – высота; $\boldsymbol{P_{сеч}}$ – периметр перпендикулярного сечения; $\boldsymbol{S_{сеч}}$ – площадь перпендикулярного сечения; $\boldsymbol{S_{бок}}$ – площадь боковой поверхности; $\boldsymbol{V}$ – объём):

$$S_{бок} = P_{сеч}\cdot l;\ V = S\cdot H;\ V = S_{сеч}\cdot l.$$

2. ***Прямая призма:***

$$S_{бок} = P\cdot l\,.$$

3. ***Прямоугольный параллелепипед*** ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ – его измерения, $\boldsymbol{d}$ – диагональ):

$$S_{бок} = P\cdot H\,;\ V = a\cdot b\cdot c\,;\ d^{2} = a^{2} + b^{2} + c^{2}\,.$$

4. ***Куб*** ($\boldsymbol{a}$ – ребро):

$$V = a^{3};\ d = a\sqrt{3}\,.$$

5. ***Произвольная пирамида*** ($\boldsymbol{S}$ – площадь основания; $\boldsymbol{H}$ – высота; $\boldsymbol{V}$ – объём):

$$V = \frac{1}{3}\,S\cdot H\,.$$

6. ***Правильная пирамида*** ($\boldsymbol{P}$ – периметр основания; $\boldsymbol{S_{бок}}$ – площадь боковой поверхности; $\boldsymbol{l}$ – апофема):

$$S_{бок} = \frac{1}{2}P\cdot l\,;\ V = \frac{1}{3}S\cdot H$$

7. ***Произвольная усеченная пирамида*** ($\boldsymbol{S_1}$, $\boldsymbol{S_2}$ – площади оснований; $\boldsymbol{h}$ – высота; $\boldsymbol{V}$ – объём):

$$V = \frac{1}{3}\,h\,(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1\,S_2}\,)\,.$$

8. ***Правильная усеченная пирамида*** ($\boldsymbol{P_1}$, $\boldsymbol{P_2}$ – периметры оснований; $\boldsymbol{l}$ – апофема; $\boldsymbol{S_{бок}}$ – площадь боковой поверхности):

$$S_{бок} = \frac{1}{2}\,(P_1 + P_2)\cdot l\,.$$

9. ***Цилиндр*** ($\boldsymbol{R}$ – радиус основания; $\boldsymbol{H}$ – высота; $\boldsymbol{S_{бок}}$ – площадь боковой поверхности; $\boldsymbol{V}$ – объём):

$$S_{бок} = 2\,\pi R\cdot H\,;\ V = \pi R^{2}\cdot H\,.$$

10. ***Конус*** ($\boldsymbol{R}$ – радиус основания; $\boldsymbol{H}$ – высота; $\boldsymbol{l}$ – образующая; $\boldsymbol{S_{бок}}$ – площадь боковой поверхности; $\boldsymbol{V}$ – объём):

$$S_{бок} = \pi R\cdot l\,;\ V = \frac{1}{3}\,\pi R^{2}\cdot H\,.$$

11. ***Шар*** ($\boldsymbol{R}$ – радиус шара; $\boldsymbol{S}$ – площадь сферической поверхности; $\boldsymbol{V}$ – объём):

$$S = 4\,\pi R^{2};\ V = \frac{4}{3}\,\pi R^{3}\,.$$

12. ***Шаровой сегмент*** ($\boldsymbol{R}$ – радиус шара; $\boldsymbol{h}$ – высота сегмента; $\boldsymbol{S}$ – площадь сферической поверхности сегмента; $\boldsymbol{V}$ – объём):

$$S = 2\pi R \cdot h \text{ ; } V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h\right).$$

13. ***Шаровой сектор*** (***R*** – радиус шара; ***h*** – высота сегмента; ***V*** – объём):

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h.$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ПРИЗМЫ И ПИРАМИДЫ

1. Если боковые ребра пирамиды равны между собой, или боковые ребра пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания пирамиды.

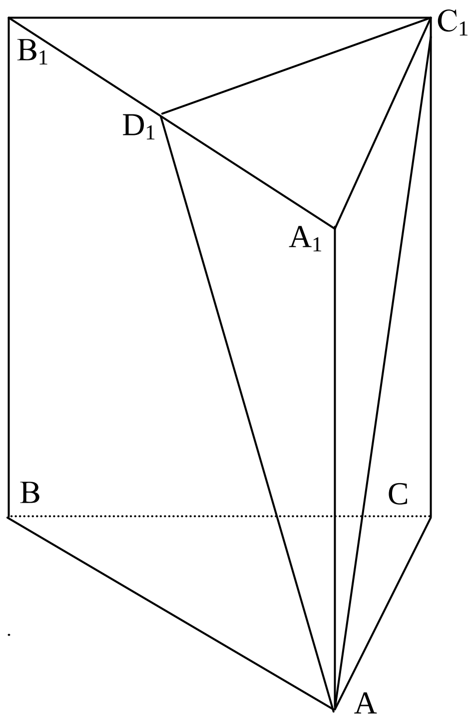
2. Если боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию, то высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание.

3. Если боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания и образуют с ней угол α, то боковая и полная поверхности такой пирамиды вычисляются по формулам:

$$S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\alpha} \text{ ; } S_{пол} = \frac{2 S_{осн} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

4. Если в какой – либо многогранник можно вписать шар, то радиус шара вычисляется по формуле: $r = \dfrac{3V}{S_{\text{пол}}}$.

Задача 1. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы равна 6 и составляет с другой боковой гранью угол $\frac{\pi}{6}$. Найти объем призмы.



Решение.

I. Начиная решать эту задачу, необходимо в первую очередь изобразить угол $\frac{\pi}{6}$, который диагональ AC_1 образует с гранью AA_1B_1B, и доказать, что именно это и есть тот самый угол.

Согласно определению, угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и ее проекцией на данную плоскость.

Чтобы построить проекцию, необходимо опустить из точки C перпендикуляр на плоскость AA_1B_1B.

Дополнительное построение. В плоскости $A_1B_1C_1$ проведем $C_1D \perp A_1B_1$. $C_1D \perp A_1B_1$ (по построению). $C_1D \perp AA_1$ (так как ребро правильной призмы перпендикулярно основанию, а следовательно, и любой прямой, лежащей в плоскости основания).

Следовательно, C_1D перпендикулярно плоскости AA_1B_1B (так как C_1D перпендикулярно двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости).

Таким образом, угол между диагональю AC_1 и плоскостью AA_1B_1B – это угол $C_1A\,D$ и он равен $\frac{\pi}{6}$.

II. Приступая к вычислительной части решения задачи, вспомним, что объем призмы $V=S_{осн} \cdot H$. Следовательно, нам нужно найти высоту призмы и сторону основания.

1. Рассмотрим $\Delta\ AC_1D$. $\angle C_1DA=90°$ (так как $C_1D \perp AA_1B_1B$, а следовательно и любой прямой, лежащей в этой плоскости). $AC_1=6$ (по условию). $\angle C_1AD=\frac{\pi}{6}$ (по условию). Следовательно, $C_1D=3$.

2. Рассмотрим $\Delta\ A_1B_1C_1$ (правильный по условию). C_1D – высота в правильном треугольнике.

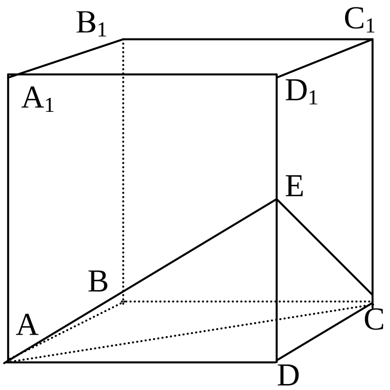
$$C_1D=\frac{a\sqrt{3}}{2}=3 \Rightarrow a=2\sqrt{3}.$$

3. Рассмотрим $\Delta\ AC_1C$. $\angle C_1CA=90^o$ (по условию); $AC=2\sqrt{3}$. $AC_1=6$. $CC_1=\sqrt{36-12}=2\sqrt{6}$ (по теореме Пифагора)

$$V=S_{осн}\cdot H=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H=\frac{12\sqrt{3}}{4}\cdot 2\sqrt{6}=18\sqrt{2}.$$

Ответ: $V=18\sqrt{2}$.

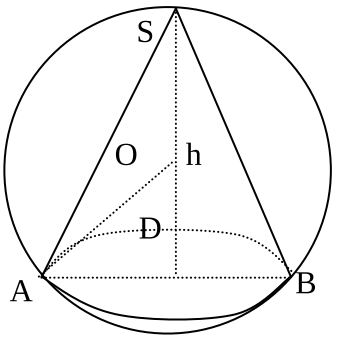
Задача 2. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) пересечен плоскостью, проходящей через вершины A, C и середину E ребра DD_1. Во сколько раз объем пирамиды ACDE меньше объема куба?



Решение. Пусть сторона куба a. Тогда $V_{куба}=a^3$, $V_{пир}=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H$. В основании пирамиды лежит прямоугольный равнобедренный треугольник ADC, $S_{\Delta ADC}=\frac{a^2}{2}$. Высотой пирамиды является $DE=\frac{1}{2}DD_1=\frac{a}{2}$. Следовательно, $V_{пир}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^3}{12}$.

Ответ: в 12 раз.

Задача 3. Определить площадь поверхности шара, описанного около прямого конуса, у которого радиус основания равен r, а высота равна h.



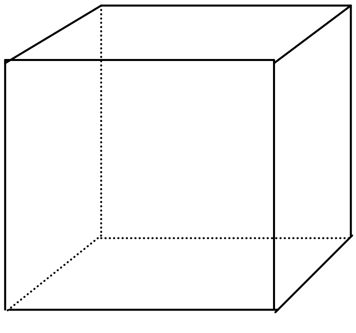
Решение. Рассмотрим ΔAOD, где O – центр шара (радиуса R), D – центр основания конуса. $OD=h-R$, $AD=r$, $OA=R$. По теореме Пифагора $R^2=r^2+(h-R)^2$

$$2hR=r^2+h^2 \Rightarrow R=\frac{h^2+r^2}{2h}$$

$$S_{шара}=4\pi R^2=\pi\left(\frac{h^2+r^2}{2h}\right)^2.$$

Ответ: $\pi\left(\frac{h^2+r^2}{2h}\right)^2$.

Задача 4. Прямоугольный параллелепипед с длинами ребер 4, 8 и 9 см составлен из кубиков с длиной ребра 1 см. Сколько удалили кубиков, убрав весь внешний слой толщиной в один кубик?

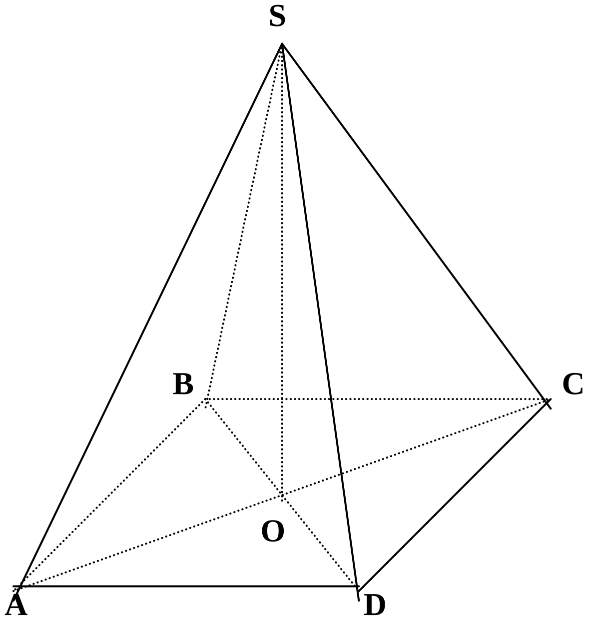


Решение. Эта задача скорее алгебраическая, нежели геометрическая. Объем параллелепипеда был $4\cdot 8\cdot 9=288$. Когда сняли весь внешний слой, то все измерения параллелепипеда уменьшились на две единицы.

Объем нового параллелепипеда $2\cdot 6\cdot 7=84$. Таким образом, объем параллелепипеда уменьшился на $288-82=204$ единицы. Так как объем каждого кубика 1, то убрали 204 кубика.

Ответ: 204.

Задача 5. Найти плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в конус с образующей, равной 2, составляющей с плоскостью основания угол 30°.



Дано: SA=SB=SC=SD=2; $\angle$SDO=30°. ABCD – квадрат. Найти $\angle$CSD.

Решение. Пирамида SABCD правильная, поэтому основанием высоты пирамиды является точка O – точка пересечения диагоналей квадрата ABCD. Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и ее проекцией, поэтому $\angle$SDO=30° (по условию).

1. Рассмотрим ΔOSD. $\angle$ SOD = 90°; OS = $\frac{1}{2}$ SD = 1; OD = $\sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ (по теореме Пифагора).

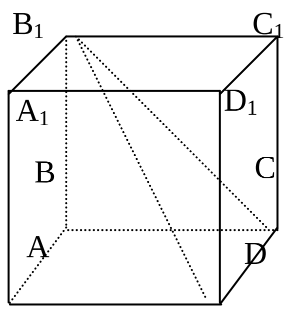
2. Рассмотрим ΔOCD. $\angle$ COD = 90°; OD=OC $\Rightarrow$ CD = OD$\sqrt{2} = \sqrt{6}$.

3. Рассмотрим ΔSDC. SD = SC = 2; DC = $\sqrt{6}$.

По теореме косинусов cos $\angle$ DSC = $\frac{4+4-6}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{4}$; $\angle$ DSC = arccos$\frac{1}{4}$

Ответ: arccos$\frac{1}{4}$.

Задача 6. Диагональ боковой грани куба равна 4 см. Найти объем шара, описанного около этого куба.



Решение. Обозначим сторону куба a. Очевидно, что радиус шара равен половине большой диагонали AC_1, которая в кубе равна $a\sqrt{3}$.

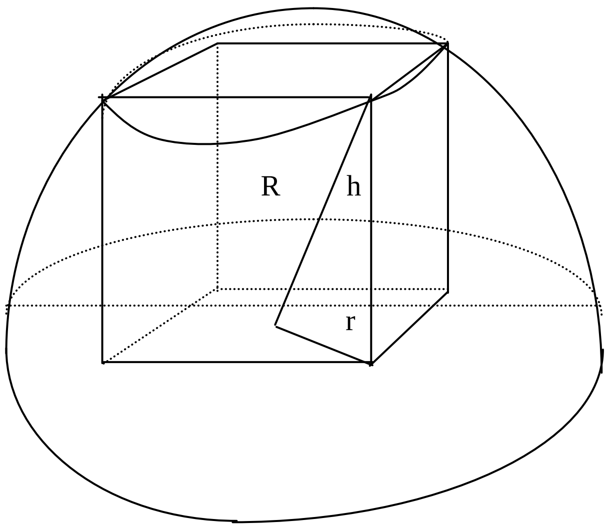
Диагональ боковой грани CB_1 = $a\sqrt{2}$ = 4(по условию). Следовательно,

$$a = 2\sqrt{2};\ a\sqrt{3} = 2\sqrt{6};\ R = \sqrt{6};$$

$$V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\, 6\sqrt{6} = 8\sqrt{6}\pi.$$

Ответ: $8\sqrt{6}\pi$.

Задача 7. Найти максимальный объем прямоугольного параллелепипеда, вписанного в полусферу радиуса 1 так, что одна грань его лежит в плоскости большого круга.



Решение. Проведем сечение полушара на высоте h. В сечении получится круг радиуса r.

$$R^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - h^2}.$$

В полученный круг надо вписать прямоугольник наибольшей площади. Площадь прямоугольника считаем по формуле S = $\frac{1}{2}d^2$ sinφ. Диагонали прямоугольника совпадают с диаметрами круга, полученного в сечении. Для данного сечения они имеют постоянную длину.

Следовательно? площадь наибольшая, когда sinφ=1, то есть диагонали перпендикулярны, а прямоугольник с перпендикулярными диагоналями может быть только квадратом.

$$S = \frac{1}{2}d^2 = 2r^2 = 2(R^2 - h^2).$$

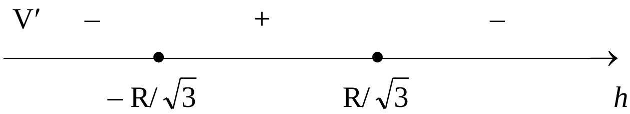
Таким образом объем параллелепипеда является функцией от высоты h

$$V(h) = 2h(R^2 - h^2).$$

Эта функция достигает своего максимума в точке, где ее производная равна нулю.

$$V'(h) = 2R^2 - 6h^2.$$

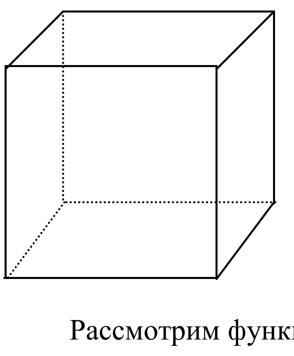
Производная равна нулю при $h = \pm\frac{R}{\sqrt{3}}$.



$$V_{\text{наиб}} = V\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = 2\frac{R}{\sqrt{3}}\left(R^2 - \frac{R^2}{3}\right) = \frac{4R^3}{3\sqrt{3}}$$

Ответ: $\frac{4}{3\sqrt{3}}$.

Задача 8. Каков максимальный объем правильной четырехугольной призмы, если ее полная поверхность равна 6?

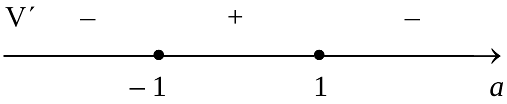


Решение. В основании правильной четырехугольной призмы лежит квадрат. Пусть его сторона равна a, а высота призмы – h.

Площадь полной поверхности призмы $S = 2a^2 + 4ah$. По условию $2a^2 + 4ah = 6$, следовательно,

$$h = \frac{6-2a^2}{4a} = \frac{3}{2a} - \frac{a}{2} \text{ и } V = S_{\text{осн}} \cdot h = a^2 h = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}a^3.$$

Рассмотрим функцию $V(a) = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}a^3$ и исследуем ее на максимум. $V'(a) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}a^2$. $V'(a) = 0$, если $a = \pm 1$.



V_{max}= V(1) = $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}$ = 1.

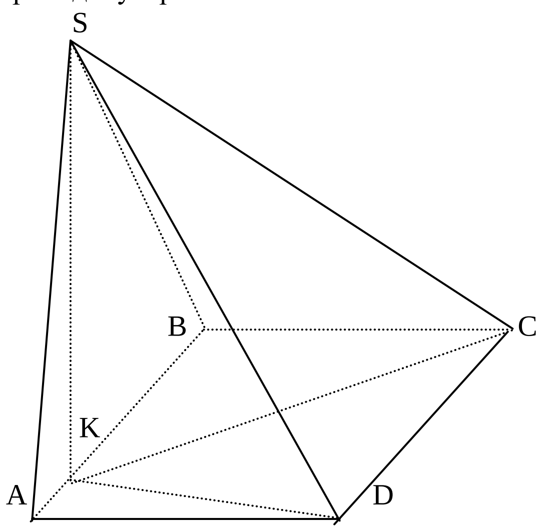
Ответ: V_{max} = 1.

Задача 9. В основании четырехугольной пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD, AB=5, BC=2. Известно, что SB=4, SA=3, SC=*x*, SD=*y*. Определить, при каких *x* и *y* объем пирамиды достигает наибольшей величины и вычислить его.

Решение. Когда мы читаем слово «наибольшее», нам кажется, что должна использоваться производная. На самом деле это не так.

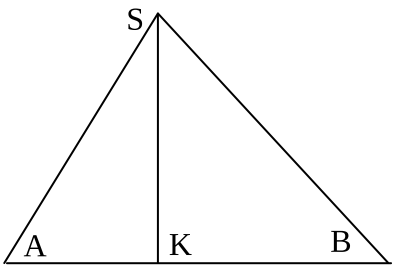
В треугольнике SAB все стороны известны. Высота пирамиды, проведенная из точки S на плоскость ABCD не больше, чем высота треугольника ABS, проведенная из точки S.

Поэтому объем достигнет своего наибольшего значения, если они совпадут, то есть плоскость SAB будет перпендикулярна плоскости ABCD.



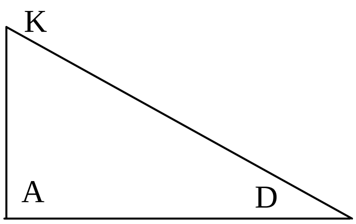
Дополнительное построение: Проведем SK перпендикулярно AB.

1. Рассмотрим ΔASB. По теореме, обратной к теореме Пифагора, ∠ASB=90° и SK=$\frac{3\cdot 4}{5}=\frac{12}{5}$.

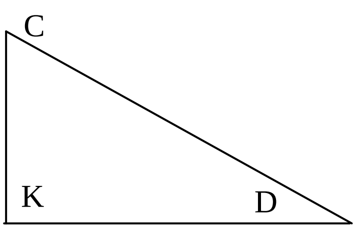


2. Рассмотрим ΔASK. ∠SKA = 90°. AK = $\sqrt{9-\frac{144}{25}}=\sqrt{\frac{81}{25}}=\frac{9}{5}$ (по теореме Пифагора). KB = 5 – $\frac{9}{5}=\frac{16}{5}$.

KD = $\sqrt{\frac{81}{25}+4}=\sqrt{\frac{181}{25}}=\frac{\sqrt{181}}{5}$

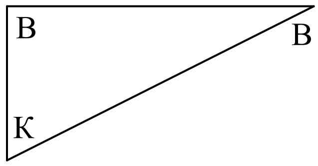


3. Рассмотрим ΔKAD. ∠KAD = 90° (по теореме Пифагора).



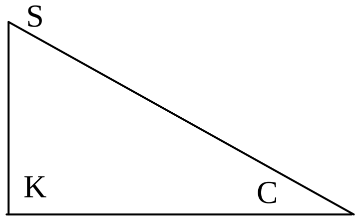
4. Рассмотрим ΔSKD. ∠SKD = 90°

SD = y = $\sqrt{\frac{144}{25}+\frac{181}{25}}=\sqrt{\frac{325}{25}}=\sqrt{13}$.



5. Рассмотрим ΔBKC. $\angle KBC = 90°$.

$$KC = \sqrt{\frac{256}{25} + 4} = \frac{\sqrt{356}}{5}.$$



6. Рассмотрим ΔSKC. $\angle SKC = 90°$

$$SC = x = \sqrt{\frac{144}{25} + \frac{356}{25}} = \sqrt{\frac{500}{25}} = 2\sqrt{5}.$$

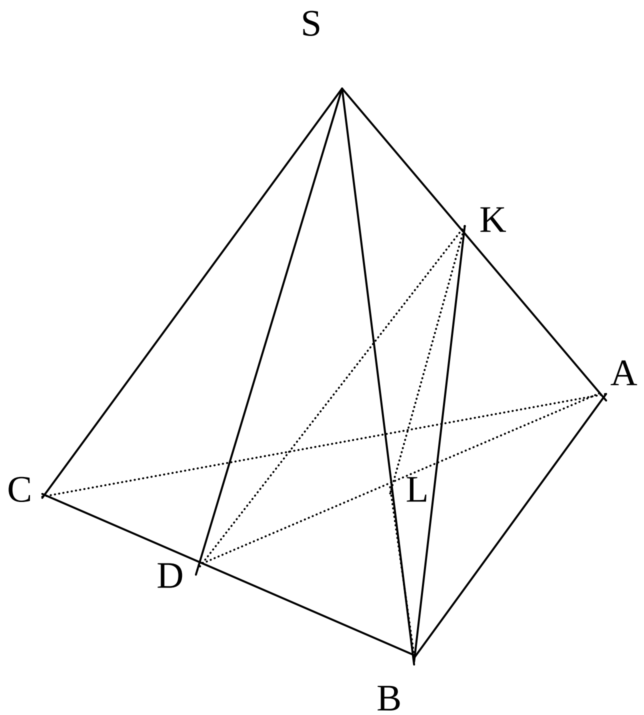
7. $V_{пир} = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{12}{5} = 8.$

Ответ: Наибольший объем пирамиды 8 достигается при $x = 2\sqrt{5}$; $y = \sqrt{13}$.

Задача 10. Ребро правильного тетраэдра ABCS равно $\sqrt{10}$. Найти расстояние между скрещивающимися высотами SD и BK граней тетраэдра SBC и BAS.

Решение. Начнем с рассуждений о том, что такое расстояние между скрещивающимися прямыми.

Если через прямую BK провести плоскость, параллельную прямой SD, то расстояние от прямой SD до этой плоскости и будет расстоянием между скрещивающимися прямыми.



Дополнительное построение. В плоскости SDA через точку K проведем прямую, параллельную SD. Эта прямая пересечет прямую AD в точке L.

Таким образом, интересующее нас расстояние это расстояние между прямой SD и плоскостью KLB (или расстояние от точки D до плоскости KLB, так как прямая SD параллельна плоскости KLB).

Рассмотрим треугольную пирамиду DLKB. Расстояние между скрещивающимися прямыми это высота этой пирамиды, опущенная на плоскость KLB из точки D.

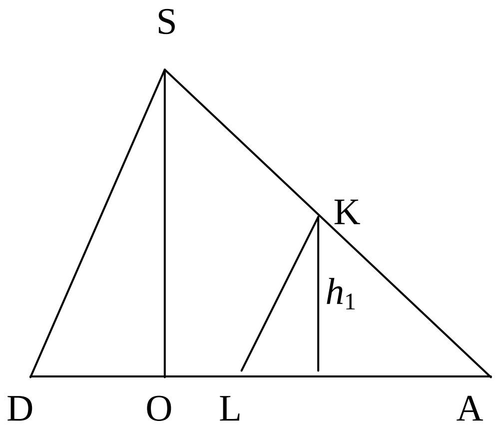
Оригинальность решения этой задачи состоит в том, что для нахождения этой высоты нам не придется ее строить.

Обозначим интересующую нас высоту h.

Мы используем формулу для объема пирамиды $V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H$. В первый раз в качестве основания мы рассмотрим ΔKLB, а во второй раз ΔDLB. $\frac{1}{3}S_{\Delta KLB}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\Delta DLB}\cdot h_1$ (где h_1– длина высоты, опущенной из точки K на плоскость ABC).

Обозначим ребро тетраэдра a.

1. Рассмотрим ΔSDA.



Проведем SO⊥DA. AD – медиана ΔABC и высота.

SO – перпендикуляр плоскости ABC (пирамида правильная, следовательно основание высоты пирамиды лежит в центре треугольника ABC, а следовательно, на высоте AD)

$$AD=\frac{a\sqrt{3}}{2};\ AO=\frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$SO=H=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$ (по теореме Пифагора);

SK = KA (так как в равнобедренном треугольнике SDA высота является медианой).

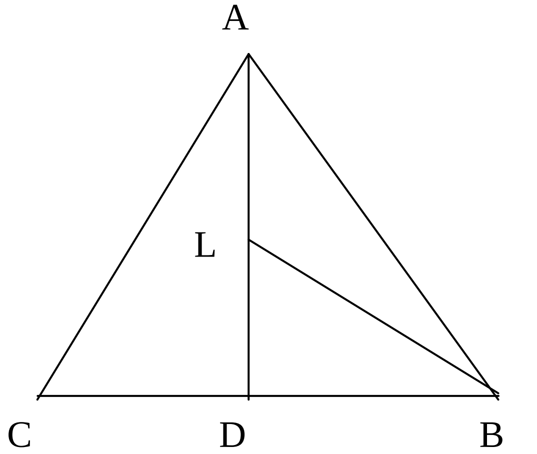
Следовательно, по теореме Фалеса, $h_1=\frac{1}{2}\cdot H=\frac{a\sqrt{6}}{6}$

$SD=\sqrt{SO^2+OD^2}=\sqrt{\frac{2a^2}{3}+\frac{a^2}{12}}=\frac{3a}{\sqrt{12}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (по теореме Пифагора)

$KL=\frac{a\sqrt{3}}{4}$ (как средняя линия), AL = LD.

2. Рассмотрим ΔABS. $BK=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (высота в правильном треугольнике).

3. Рассмотрим ΔABC.



$$LD = \frac{a\sqrt{3}}{4};\ BD = \frac{a}{2};$$

$BL = \sqrt{\frac{3a^2}{16} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{4}$ (по теореме Пифагора)

$S_{\Delta DLB} = \frac{1}{2} DL \cdot DB = \frac{1}{2}\ \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}.$

4. Рассмотрим ΔKLB.

$$KL = \frac{a\sqrt{3}}{4};\ BL = \frac{a\sqrt{7}}{4};\ BK = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow p = \frac{a}{8}\left(3\sqrt{3} + \sqrt{7}\right).$$

По формуле Герона

$$S_{\Delta KLB} = \sqrt{\frac{a}{8}\left(3\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)\frac{a}{8}\left(3\sqrt{3} - \sqrt{7}\right)\frac{a}{8}\left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)\frac{a}{8}\left(-\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)} =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{20 \cdot 4}}{64} = \frac{a^2\sqrt{5}}{16}.$$

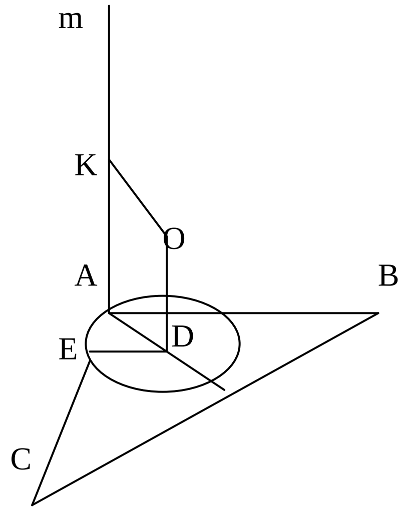
Подставим найденное значение в равенство

$$S_{\Delta KLB} \cdot h = S_{\Delta DLB} \cdot h_1$$

$$\frac{a^2\sqrt{5}}{16} \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}\ \sqrt{3}}{6\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}\ 3\sqrt{2}}{6\sqrt{5}} = 1.$$

Ответ: 1.

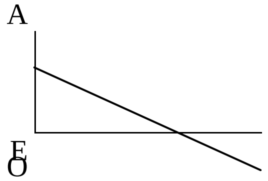
Задача 11. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая *m*, перпендикулярная плоскости этого треугольника. Шар радиуса *r* касается всех сторон треугольника и прямой *m*. Найти расстояние от точки A до центра шара, если AB=AC, $\angle BAC = 120°$.



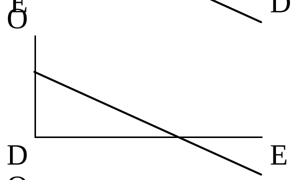
Решение. Пусть O – центр шара, D – его проекция на плоскость ABC. OK перпендикулярно прямой *m* (следовательно, равно *r*).

Центр шара проектируется на плоскость ABC в точку D, являющуюся центром вписанной окружности. Центр вписанной окружности лежит в точке пересечения биссектрис.

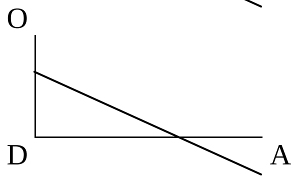
Поэтому $\angle DAE = 60°$. Пусть E – точка касания шара со стороной AC.



1. Рассмотрим ΔADE. $\angle DEA = 90°$; $\angle DAE = 60°$; $AD = r$. Следовательно $ED = \frac{r\sqrt{3}}{2}$.



2. Рассмотрим ΔOED. $\angle ODE = 90°$; $OE = r$; $ED = \frac{r\sqrt{3}}{2}$. Следовательно $OD = \sqrt{r^2 - \frac{3}{4}r^2} = \frac{r}{2}$ (по т. Пифагора).



3. Рассмотрим ΔAOD. $\angle ODA = 90°$; $AD = r$; $OD = \frac{r}{2}$. Следовательно $AO = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{r\sqrt{5}}{2}$ (по т. Пифагора).

Ответ: $AO = \frac{r\sqrt{5}}{2}$.

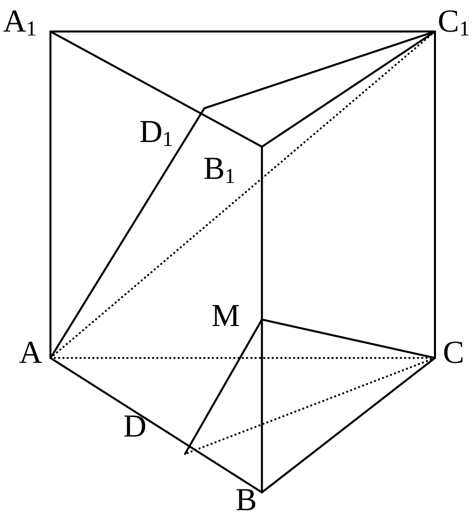
Задача 12. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC, в котором $AB=BC=a$, $\angle ABC=90^o$. Высота призмы равна *a*. На ребре AB выбрана точка D так, что 2BD=AD. Через точки C и D параллельно AC_1 проведена плоскость. Найти площадь получившегося сечения.

Решение. Отметим точку D_1 на A_1B_1: $B_1D_1= \frac{a}{3}$, $C_1D_1 \parallel CD$.

Следовательно, искомая плоскость параллельна плоскости AD_1C_1. (Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то плоскости параллельны).

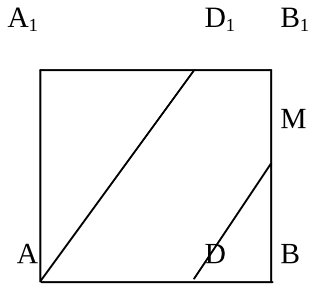
Таким образом, искомая плоскость пересекает плоскость AA_1B_1B по прямой, параллельной AD_1.

Проведем $DM \parallel AD_1$.



Искомая плоскость DMC.

1. Рассмотрим плоскость AA_1B_1B.

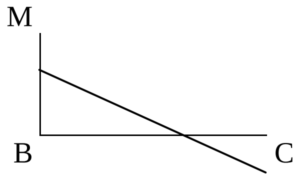


$\Delta\ AA_1D_1 \sim \Delta\ MBD$ (так как прямые AD_1 и DM параллельны по построению).

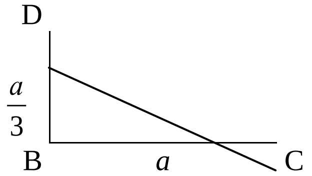
$$AA_1 = a,\ A_1O_1 = \frac{2a}{3},\ DB = \frac{a}{3},$$

$$\frac{a}{\frac{2a}{3}} = \frac{BM}{\frac{a}{3}} \Rightarrow BM = \frac{a}{2}.$$

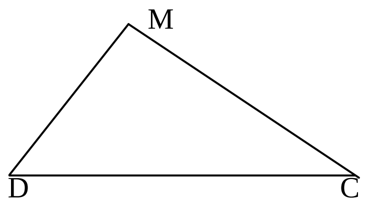
$$DM = \sqrt{\frac{a^2}{9}+\frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{6}$$ (по теореме Пифагора).



2. Рассмотрим ΔBMC. $BM = \frac{a}{2}$, $BC = a$, $MC = \sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ (по теореме Пифагора).



3. Рассмотрим ΔBCD. $CD = \sqrt{a^2+\frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$ (по теореме Пифагора).



4. Найдем площадь сечения, воспользовавшись формулой Герона:

$$p = \frac{\frac{a\sqrt{10}}{3}+\frac{a\sqrt{5}}{2}+\frac{a\sqrt{13}}{6}}{2} = \frac{a}{12}\left(2\sqrt{10}+3\sqrt{5}+\sqrt{13}\right),$$

$$S = \left(\frac{a}{12}\right)^2 \cdot \sqrt{(2\sqrt{10}+3\sqrt{5}+\sqrt{13})(2\sqrt{10}+3\sqrt{5}-\sqrt{13})}\ \times$$

$$\times\sqrt{(2\sqrt{10}-3\sqrt{5}+\sqrt{13})(3\sqrt{5}-2\sqrt{10}+\sqrt{13})} =$$

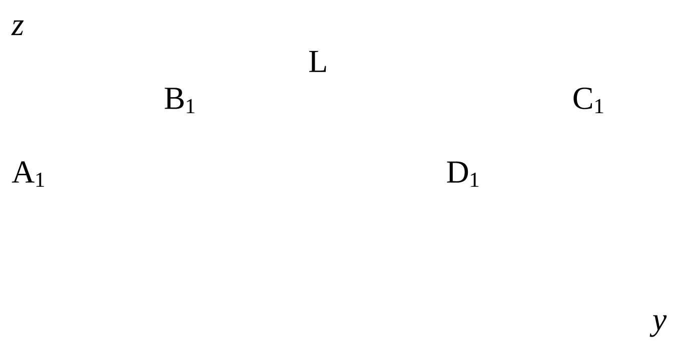
$$= \left(\frac{a}{12}\right)^2 \cdot \sqrt{[(2\sqrt{10}-3\sqrt{5})^2-13]\cdot[13-(3\sqrt{5}-2\sqrt{10})^2]} =$$

$$= \left(\frac{a}{12}\right)^2 \cdot \sqrt{(85-13+12\sqrt{50}-3\sqrt{5})^2\cdot(13-85+12\sqrt{50}-3\sqrt{5})^2} =$$

$$= \frac{a^2}{144}\sqrt{-72^2+144\cdot 50} = \frac{a^2}{12}\sqrt{50-36} = \frac{a^2\sqrt{14}}{12}.$$

Ответ: Площадь сечения $\frac{a^2\sqrt{14}}{12}$.

Задача 13. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 1 точка L лежит на ребре B_1C_1, причем $|B_1L| = \frac{1}{3}$. Найти угол между отрезками AL и AC.



B C

x

A D

Решение. Необычность этого примера состоит в том, что данную задачу лучше решать методами векторной алгебры.

Ведем систему координат. Начало координат поместим в точку A, ось x направим вдоль прямой AD, ось y – AB, ось z – AA_1. Тогда следующие точки и векторы будут иметь соответствующие координаты:

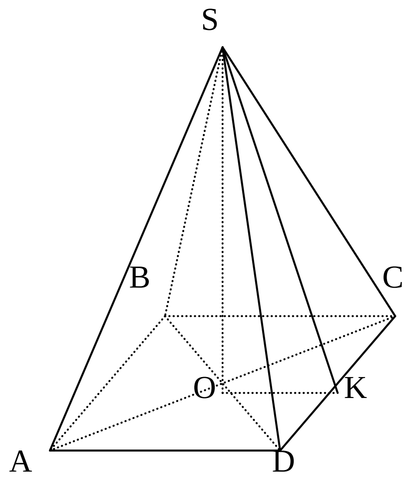
$$A\ (0;0;0),\ C\ (1;1;0)\ ,\ L\ (0;\ \frac{1}{3};0)$$

$$AC\ (1;1;0)\ ,\ AL\ (1;\ \frac{1}{3};1)$$

$$\cos(AC;AL) = \frac{AC \cdot AL}{|AC| \cdot |AL|} = \frac{1+\frac{1}{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{19}{9}}} = \frac{4}{\sqrt{38}} = \frac{2\sqrt{38}}{19}.$$

Ответ: Угол между прямыми AL и AC равен $\arccos\frac{2\sqrt{38}}{19}$.

Задача 14. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a. Найти объем пирамиды, если плоский угол при вершине равен 2α.



Дано: SABCD – правильная. AB = BC = CD = DA = a; $\angle$ DSC = 2α. V = ?

Решение. Дополнительное построение: проведем OK перпендикулярно CD.

1. Рассмотрим ΔDOC. $\angle$DOC=90°, OD = OC, OK – высота $\Rightarrow$ OK биссектриса и медиана. Следовательно, DK = KC = $\frac{a}{2}$.

2. Рассмотрим ΔDSC. SD = SC(по условию), DK = KC. Следовательно, SK – медиана, биссектриса и высота.

3. Рассмотрим ΔDSK. $\angle$SKD=90°, DK = $\frac{a}{2}$, $\angle$DSK = α.

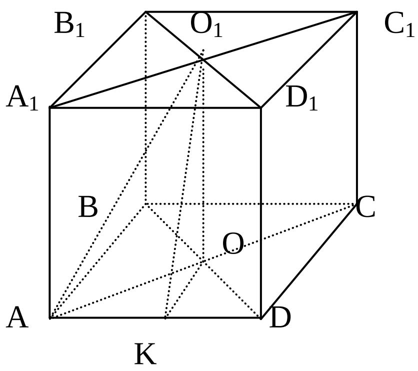
4. Рассмотрим ΔOSK. $\angle$SOD=90°, OK = $\frac{a}{2}$, SK = $\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. Следовательно,

$$SO = \sqrt{\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2\sin\alpha}\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{a\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin 2\alpha}.$$

$$V_{пир} = \frac{1}{3}\ a^2 \cdot SO = \frac{a^3\sqrt{\cos 2\alpha}}{6\sin 2\alpha}.$$

Ответ: $V = \dfrac{a^3\sqrt{\cos 2\alpha}}{6\sin 2\alpha}$.

Задача 15. На сколько дальше центр верхнего основания куба с ребром 1 удален от вершины нижнего основания, чем от его стороны?



Решение. Пусть K – середина AD, O – центр нижнего основания, O_1 – центр верхнего основания.

1. Рассмотрим ΔAOB. AO = OB (так как в квадрате диагонали равны и при пересечении делятся пополам). $\angle AOB = 90^o$ (так как диагонали в квадрате перпендикулярны). Следовательно, AO = OB = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Рассмотрим ΔOO_1A. $\angle O_1OA=90°$, OA = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, OO_1 = 1. Следовательно, $O_1A = \sqrt{1^2 + (\frac{\sqrt{2}}{4})^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

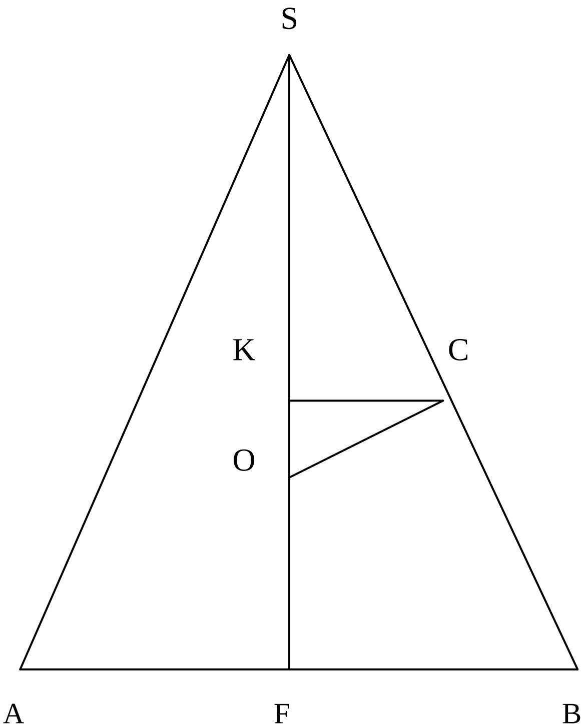
3. Рассмотрим CO_1A. $O_1A = O_1C$; O_1O – медиана. Следовательно, O_1O – высота (так как в равнобедренном треугольнике медиана является высотой).

$O_1O \perp AC$. Аналогично, $O_1O \perp BD$. Следовательно, O_1O перпендикуляр к плоскости ABCD.

4. Рассмотрим ΔOO_1K. $\angle O_1OK=90°$, OK = $\dfrac{1}{2}$, OO_1 = 1. Следовательно, $O_1K = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. $O_1C - O_1K = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: на $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{2}$.

Задача 16. Радиус окружности, по которой шар, вписанный в конус, касается поверхности этого конуса, равен $\sqrt{3}$ см. Угол между образующей и высотой конуса равен 30°. Найти объем конуса; показать, что этот объем превосходит 75 см^3.



Решение. Рассмотрим центральное сечение конуса и шара ASB. O – центр вписанного шара; C и F – точки касания шара и конуса; K – центр окружности, по которой шар касается конуса.

1. Рассмотрим ΔSKC. $\angle$ SKC = 90° (по условию), $\angle$ KSC = 30° (по условию), KC = $\sqrt{3}$ (по условию). Следовательно, SK = 3.

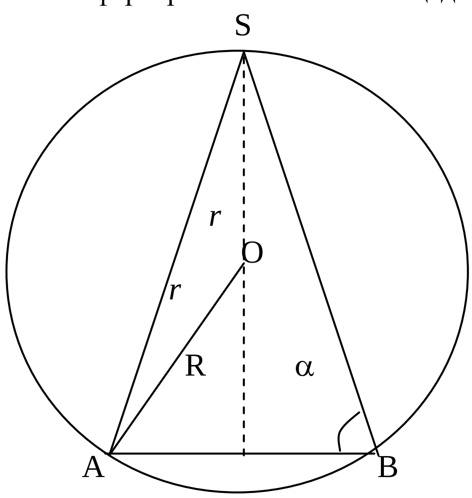
2. Рассмотрим два треугольника ΔSKC ~ ΔCKO (по двум углам). $\angle$OCK= $\angle$KSC (каждый из них составляет вместе с $\angle$SOC 90°). $\angle$OKC= $\angle$SKC (как прямые). $\dfrac{\sqrt{3}}{KO} = \dfrac{SK}{\sqrt{3}}$, откуда KO = $\dfrac{r^2}{SK}$ =1, OC=2.

3. Рассмотрим ΔSFB. SF = 3 + 1 + 2 = 6 (OF = OC). FB = SF × tg30° = $6 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

4. $V_{кон} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi (2\sqrt{3})^2\, 6 = 24\,\pi$. Так как $\pi > 3{,}14 \Rightarrow 24\pi > 24 \cdot 3{,}14 = 75{,}36 > 75$.

Ответ: Объем конуса 24 π

Задача 17. В сферу вписан конус. Угол при основании осевого сечения конуса равен α; площадь поверхности сферы равна *S*. Найти площадь полной поверхности конуса.



Решение. По условию $4\pi r^2 = S \Rightarrow r^2 = \dfrac{S}{4\pi}$; $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$.

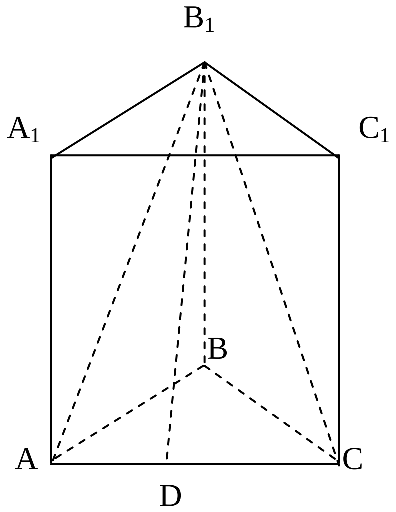
1. Рассмотрим ΔASB. По теореме синусов: l = SB = 2r sin α. R = l cos α = 2r sin α cos α.

2. $S_{полн.конуса} = \pi R^2 + \pi R l = \pi R (R + l) = = \pi l^2 \cos\alpha(1+\cos\alpha) = 4\pi r^2 \sin^2\alpha\cos\alpha(1+\cos\alpha) =$

$= S \sin^2\alpha \cos^2\alpha\ (1 + \cos\alpha)$.

Ответ: $S_{полн.конуса} = S \sin^2\alpha \cos^2\alpha\ (1 + \cos\alpha)$.

Задача 18. В правильной треугольной призме через сторону нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания проведена плоскость, пересекающая боковые грани по отрезкам, составляющим между собой угол 2α. Площадь соответствующего сечения равна *S*. Найти сторону основания призмы.



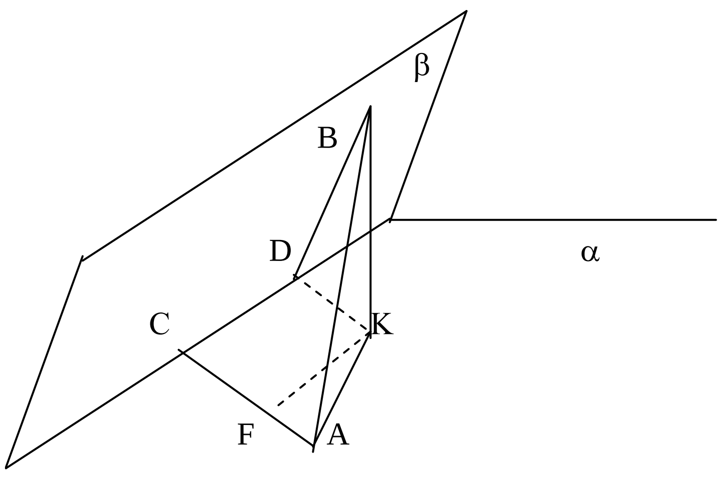
Решение. Пусть сторона основания призмы равна *a*, D – середина ребра AC.

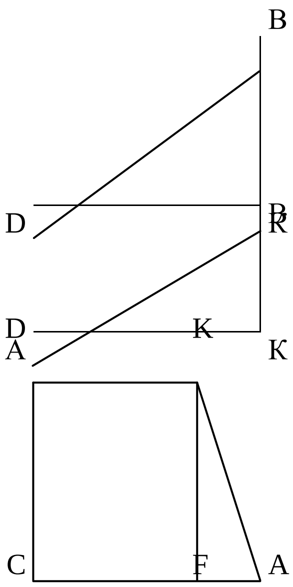
1. Рассмотрим ΔAB_1D. AD $= \dfrac{a}{2}$, $\angle B_1DA = 90°$, $\angle AB_1D = \alpha$ (так как в равнобедренном треугольнике медиана является высотой и биссектрисой). Следовательно, $B_1D = AD\ \text{ctg}\alpha = \dfrac{a}{2}\ \text{ctg}\alpha$

2. $S_{сеч} = S = \dfrac{1}{2} a \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \text{ctg}\alpha = \dfrac{a^2}{4}\text{ctg}\alpha$, откуда $a^2 = \dfrac{4S}{\text{ctg}\alpha}$; $a = 2\sqrt{\dfrac{S}{\text{ctg}\alpha}} = 2\sqrt{S\ \text{tg}\alpha}$.

Ответ: $a = 2\sqrt{S\ \text{tg}\alpha}$.

Задача 19. Концы отрезка AB=25 см лежат на разных гранях двугранного угла, равного 60°. Из точек A и B опущены перпендикуляры AC и BD на ребро двугранного угла, AC=5, BD=8. Найдите CD.





Решение. Дополнительное построение. Опустим из точки B перпендикуляр на плоскость α. Обозначим его основание K.

1. Рассмотрим ΔBDK. $\angle K = 90°$ (по построению), BD = 8 (по условию). $BD \perp CD \Rightarrow DK \perp CD$ (по теореме о трех перпендикулярах). Следовательно, $\angle BDK = 60°$ (по определению угла между плоскостями). Тогда DK = 4, $BK = 4\sqrt{3}$.

2. Рассмотрим ΔABK. $\angle K = 90°$ (по построению), AB = 25 (по условию), $BK = 4\sqrt{3}$. Следовательно, $AK = \sqrt{625-48} = \sqrt{577}$ (по теореме Пифагора).

3. Рассмотрим трапецию CDKA. Проведем KF | | CD. FA = CA – DK = 1, $\angle KFA = 90°$ (по построению). $CD = KF = \sqrt{577-1} = \sqrt{576} = 24$ (по теореме Пифагора).

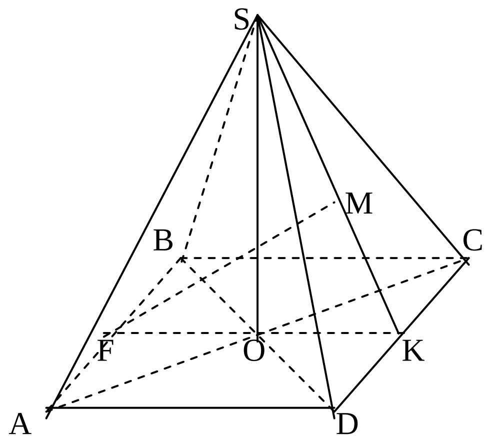
Ответ: CD = 24.

Задача 21. В правильной четырехугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом 60º. Расстояние от вершины основания до боковой грани равно $3\sqrt{3}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение. Дополнительное построение. Проведем $FK \perp DC$, F – середина AB, Проведем $FM \perp SK$ (в плоскости FSK).

1. $DC \perp SK$ (по построению), $DC \perp FK$ (по построению). Следовательно, DC перпендикуляр к плоскости FMK. Отсюда $DC \perp FM$; $\angle SKO = 60°$.

2. Прямая AB параллельна плоскости DSC. Поэтому расстояние от точки F до плоскости DSC равно расстоянию от точки A до плоскости DSC.



3. $FM \perp DC$ (по решению), $FM \perp SK$ (по построению), $\Rightarrow FM \perp$ плоскости DSK, $FM = 3\sqrt{3}$ (по условию).

4. Рассмотрим ΔFMK. $\angle$ FMK = 90°(по построению), $FM = 3\sqrt{3}$, $\angle$ MKF = 60°(по условию). Следовательно, FK = AB = AC = 6.

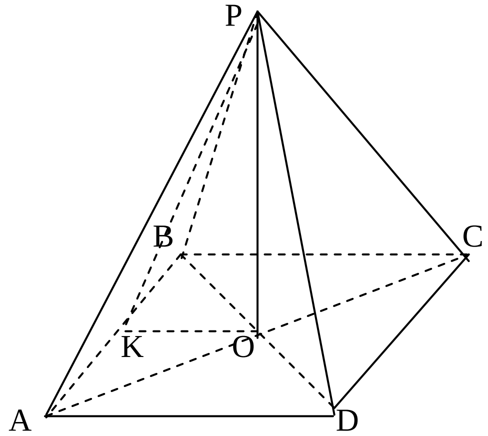
5. Рассмотрим ΔOSK. $\angle$ SOK = 90°(по построению), $OK = \frac{1}{2}FK = 3$, $\angle$ OKS = 60°. Следовательно, SK = 2 OK = 6.

6. $S_{бок} = 4\ S_{\Delta DSC} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot SK \cdot DC = 2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$.

Ответ: Площадь боковой поверхности равна 72.

Задача 22. Площадь сечения APC правильной четырехугольной пирамиды PABCD, вершиной которой является точка P, равна S, а угол между гранями PAB и ABCD равен α. Найти объём этой пирамиды.

Решение. Дополнительное построение. Проведем PO перпендикулярно плоскости ABCD, PK $\perp$ AB. По теореме о трех перпендикулярах OK $\perp$ AB, а следовательно, $\angle$ PKO $=\alpha$ (как линейный угол двугранного угла). Пусть сторона квадрата равна a, а высота пирамиды – H.



1. Рассмотрим ΔABC. AC = $a\sqrt{2}$ (как диагональ квадрата). Поэтому $a\sqrt{2}\cdot H = 2S$ и $H = \dfrac{2S}{a\sqrt{2}} = \dfrac{S\sqrt{2}}{a}$.

2. Рассмотрим ΔOKP. $\angle$ POK = 90°(по условию), $\angle$ PKO = α (по построению), KO = $\dfrac{a}{2}$.

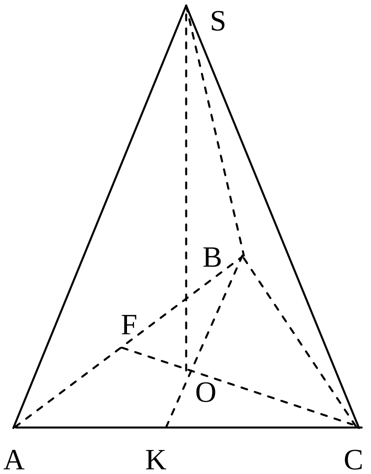
Следовательно, $H = \dfrac{a}{2}\,\mathrm{tg}\alpha$.

3. Приравняем H из 1 и 2. $\dfrac{a}{2}\,\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{S\sqrt{2}}{a}$ или $a^2 = 2S\sqrt{2}\,\mathrm{ctg}\alpha$ $\quad a = \sqrt{2S\sqrt{2}\,\mathrm{ctg}\alpha}$. $H = \dfrac{S\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{S}\sqrt[4]{2}\sqrt{\mathrm{ctg}\alpha}} = \sqrt{\dfrac{S\,\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{2}}}$.

4. Вычислим объем $V = \dfrac{1}{3}\cdot S_{осн}\cdot H = \dfrac{1}{3}\cdot a^2\cdot H = \dfrac{1}{3}\cdot 2S\sqrt{2}\,\mathrm{ctg}\alpha\cdot\sqrt{\dfrac{S\,\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{2}}} = \dfrac{2\sqrt[4]{2}S^{3/2}\sqrt{\mathrm{ctg}\alpha}}{3} = \dfrac{2\sqrt[4]{2}}{3}S^{3/2}\sqrt{\mathrm{ctg}\alpha}$.

Ответ: $V = \dfrac{2\sqrt[4]{2}}{3}S^{3/2}\sqrt{\mathrm{ctg}\alpha}$.

Задача 23. Длина высоты треугольной пирамиды SABC равна $\sqrt{3}$. Углы, составленные боковыми ребрами с плоскостью основания, равны 60°. Найти площадь полной поверхности и объем пирамиды, если все боковые грани наклонены к плоскости основания под равными углами.



Решение

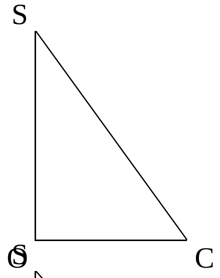
1. Если ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под одинаковым углом, то вершина проектируется в центр описанной окружности (точка O).

2. Если боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одинаковым углом, то вершина проектируется в центр вписанной окружности (точка O).

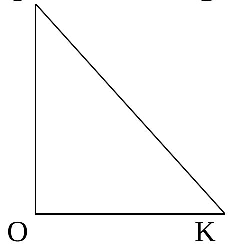
3. Если в треугольнике совпадают центры вписанной и описанной окружностей, то этот треугольник правильный.

Таким образом мы имеем дело с правильной треугольной пирамидой. Пусть сторона основания равна *a*.

Дополнительное построение. В треугольнике ABC проведем CF $\perp$ AB; BK $\perp$ AC. Эти прямые пересекаются в точке O (центр правильного треугольника и основание высоты пирамиды).



4. Рассмотрим ΔOSC. $\angle SOC = 90°$, $\angle SCO = 60°$(по условию), OC = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ (как радиус описанной окружности в правильном треугольнике). Следовательно, SO = $\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{tg}60°$. Откуда $a = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.



5. Рассмотрим ΔSOK. $\angle SOK = 90°$, OK = $\frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2}$, SO = $\sqrt{3}$.

Следовательно, SK = $\sqrt{3+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ (По теореме Пифагора).

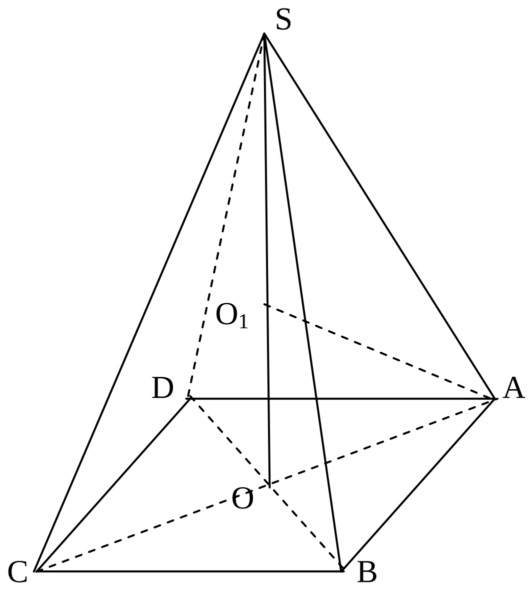
6. Пусть *h* – апофема, например SK.

$$V_{пир} = \frac{1}{3}\cdot S_{осн}\cdot H = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{3} = \frac{3}{4}.$$

$$S_{полн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3\cdot\frac{a\cdot h}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{13}).$$

Ответ: $V_{пир} = \frac{3}{4}$, $S_{полн} = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{13})$.

Задача 24. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна *h*, а радиус описанной сферы равен *R*. Найти сторону основания.



Решение. Так как пирамида правильная, то основанием высоты пирамиды служит точка O – центр квадрата, а центр описанной сферы лежит на высоте пирамиды (или ее продолжении).

Пусть это точка O_1. Рассмотрим Δ O_1OA. Обозначим сторону основания x. Тогда $AO = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$, $AO_1 = R$, $OO_1 = h - R$ (или $R - h$ при внешнем расположении центра). Составим уравнение, используя теорему Пифагора:

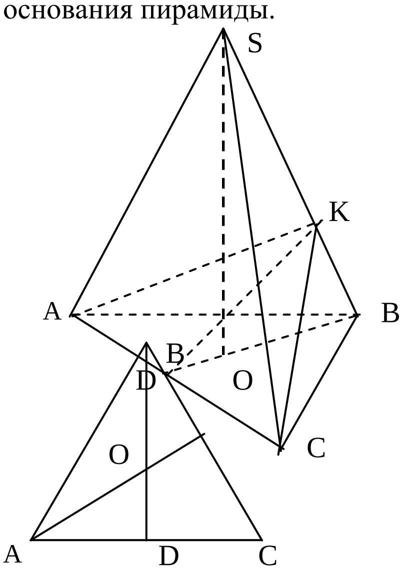
$$R^2 = \frac{x^2}{2} + (h - R)^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{x^2}{2} + h^2 - 2hR + R^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = 2hR - h^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 4hR - 2h^2 .$$

Поэтому $x = 2\sqrt{hR - \dfrac{h^2}{2}}$.

Ответ: $2\sqrt{hR - \dfrac{h^2}{2}}$

Задача 25. Объём правильной треугольной пирамиды равен 18 дм^2. Двугранный угол между плоскостью основания и плоскостью, проведенной через сторону основания перпендикулярно противолежащему боковому ребру пирамиды, равен 45°. Найти площадь основания пирамиды.

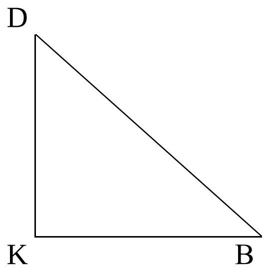


Решение. Дополнительное построение. В грани SCB проведем $CK \perp SB$. Тогда в грани ASB $AK \perp SB$, т.к. $\Delta ASB = \Delta CSB$. Следовательно, SB перпендикулярно плоскости AKC.

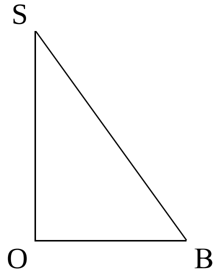
Проведем $KD \perp AC$. Так как ΔAKC равнобедренный ($AK = AC$), то высота является медианой. Поэтому AD=DC. Следовательно, BD – медиана ΔABC, а поэтому и высота.

$KD \perp AC$, $BD \perp AC \Rightarrow \angle KDB = 45°$ (линейный угол двугранного угла). Пусть сторона основания равна a.

1. Рассмотрим ΔABC. В $S_{осн} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $BD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $BO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



2. Рассмотрим ΔKDB. $\angle DKB = 90°$ (тек как SB перпендикулярно плоскости AKC). $\angle KDB = 45° \Rightarrow \angle KBD = 45°$.



3. Рассмотрим ΔSOB. $\angle SOB = 90°$, $\angle SBO = 45°$, $\Rightarrow SO = BO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = h$.

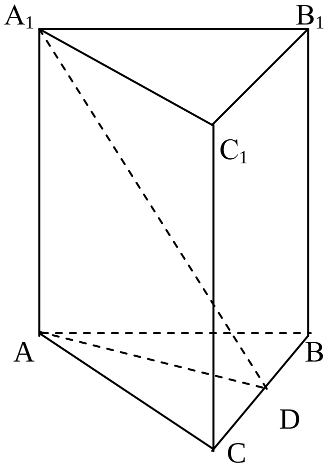
4. $V_{пир} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot H = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3 \cdot 4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a^3}{12}$.

По условию $\dfrac{a^3}{12} = 18 \Rightarrow a^3 = 18 \cdot 12 \Rightarrow a = 6$.

5. $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$.

Ответ: 9 дм^3.

Задача 26. Боковые грани правильной треугольной призмы – квадраты. Найти расстояние от вершины верхнего основания до середины противоположной стороны нижнего основания, если сторона основания равна a.



Решение. Дополнительное построение. В грани ABC проведем $AD \perp BC$. По теореме о трех перпендикулярах $A_1D \perp BC$. Следовательно, A_1D – интересующее нас расстояние.

1. Так как призма правильная, то в ее основании лежит правильный треугольник со сторонами a.

2. Так как боковые грани квадраты, то боковые ребра тоже равны a.

3. Рассмотрим ΔABC. $AD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (как высота правильного треугольника).

4. Рассмотрим $\Delta A\,A_1D$. $\angle A_1AD = 90°$ (по условию), $A_1A = a$, $AD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $A_1A = \sqrt{a^2 + \dfrac{3}{4}a^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$ (по теореме Пифагора).

Ответ: $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Задача 27. Фигура, заданная на плоскости системой неравенств

$$x^2 + y^2 \le 4r^2$$

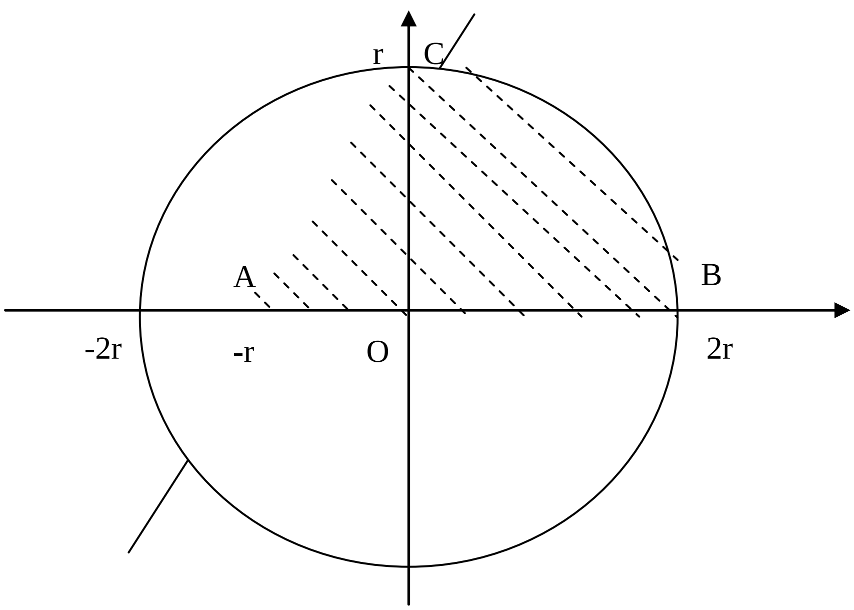
$$y \le 2(x+r),\ y \ge 0,\ r > 0,$$

вращается вокруг оси OX. При каком значении r объем полученного тела вращения равен 180π?

Решение. Изобразим фигуру. Первое неравенство определяет круг радиуса $2r$ с центром в начале координат. Второе неравенство определяет полуплоскость. От вращения ΔOAC получим конус.

$$V_к = \frac{1}{3}\pi(2r)^2 \cdot r = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

От вращения четверти круга OCB получим полушар.



$$V_{полушара} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi(2r)^3 = \frac{16}{3}\pi r^3.$$

$$V_{общая} = \frac{20}{3}\pi r^3.$$

По условию $V = 180\pi$. Получаем уравнение:

$$\frac{20}{3}\pi r^3 = 180\pi.$$

Отсюда $r^3 = 27$, $r = 3$.

Ответ: при $r = 3$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания увеличили на 10% и 20%, а высоту уменьшили на 20%. На сколько процентов изменился объем параллелепипеда?

Ответ. 5,6%.

2. В прямом круговом конусе радиус основания увеличили на 20%, а высоту конуса увеличили на 30%. На сколько процентов увеличился объем конуса?

Ответ. 87,2%.

3. Площадь поверхности первого шара на 44% больше площади поверхности второго шара. На сколько процентов объем первого шара больше объема второго шара?

Ответ. 72,8%.

4. Объем первого цилиндра больше объема второго цилиндра в 8 раз. На сколько процентов площадь полной поверхности первого цилиндра больше площади полной поверхности второго цилиндра, если отношение высоты к радиусу основания одно и то же для каждого цилиндра?

Ответ. 75%.

5. Основанием призмы является квадрат со стороной, равной 4 см, а все боковые грани – ромбы. При этом одна из вершин верхнего основания находится на одинаковом расстоянии от всех вершин нижнего основания. Найти объем призмы.

Ответ. $32\sqrt{2}$.

6. В правильной треугольной пирамиде все ребра равны 4 см. Найти расстояние между двумя непересекающимися ребрами.

Ответ. $2\sqrt{2}$.

7. Объем правильной треугольной призмы равен 72 см^3. Найти длину диагонали боковой грани, если известно, что она составляет с другой боковой гранью угол $\frac{\pi}{4}$.

Ответ. $6\sqrt[3]{6}$.

8. В основании призмы лежит квадрат со стороной 8 см. Одна из вершин верхнего основания находится на одинаковом расстоянии от всех вершин нижнего основания, а сечение призмы, проходящее через эту вершину и диагональ нижнего основания – ромб. Найти объем призмы.

Ответ. $256\sqrt{6}$.

9. В правильной треугольной пирамиде все ребра равны и два непересекающихся ребра находятся на расстоянии 6 см друг от друга. Найти ребро пирамиды.

Ответ. $6\sqrt{2}$.

10. Боковая поверхность конуса втрое больше площади его основания. Найти угол его развертки.

Ответ. $\frac{2\pi}{3}$.

11. Боковая поверхность прямого кругового конуса равна *S*, а расстояние от центра основания до образующей конуса равно *k*. Найти объем конуса.

Ответ. $\frac{kS}{3}$.

12. Угол развертки конуса равен 120°. Найти отношение площади боковой поверхности конуса к площади его основания.

Ответ. 3.

13. Площадь боковой поверхности прямого кругового конуса равна *S*, а его объем – *V*. Найти расстояние от центра основания конуса до его образующей.

Ответ. $\frac{3V}{S}$.

14. Угол развертки конуса равен 120°, а площадь его боковой поверхности S . Найти площадь основания конуса.

Ответ. $\frac{S}{3}$.

15. Объем прямого кругового конуса равен *V*, а расстояние от центра основания до образующей конуса равно *k*. Найти площадь боковой поверхности конуса.

Ответ. $\frac{3V}{k}$.

16. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где ABCD – квадрат нижнего основания AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 – боковые ребра. Найти угол между прямыми AD_1 и B_1D.

Ответ. 90º.

17. Расстояние между двумя непересекающимися диагона-лями смежных граней куба равно 1. Найти длину ребра куба.

Ответ. $\sqrt{3}$.

18. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где ABCD – квадрат нижнего основания, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 – боковые ребра. Найти расстояние между прямыми AA_1 и B_1D, если ребро куба равно *a*.

Ответ. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ 19.

19. Ребро правильного тетраэдра ABCS равно $\sqrt{35}$. Найти расстояние между высотами SD и AN граней тетраэдра SBC и BAS.

Ответ. $\sqrt{2}$.

20. Найти плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в конус с образующей, равной 2, составляющей с плоскостью основания угол 30°.

Ответ. $\arccos\frac{5}{8}$.

21. Найти плоский угол при вершине правильной шестиугольной пирамиды, вписанной в конус с образующей, равной 2, составляющей с плоскостью основания угол 45°.

Ответ. $\arccos\frac{3}{4}$.

22. Найти плоский угол при вершине правильной четырех-угольной пирамиды, вписанной в конус с образующей, равной 2, составляющей с плоскостью основания угол 45°.

Ответ. 60º.

23. Найти плоский угол при вершине правильной шестиуголь-ной пирамиды, вписанной в конус с образующей, равной 2, составляющей с плоскостью основания угол 60°.

Ответ. $\arccos\frac{7}{8}$.

24. Найти плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в конус с образующей, равной 2, составляющей с плоскостью основания угол 60°.

Ответ. $\arccos\frac{3}{4}$.

25. Центр верхнего основания куба с ребром, равным a, соединен с серединами сторон нижнего основания, которые также последовательно соединены. Найти полную площадь поверхности полученной пирамиды.

Ответ. $2a^2$.

26. Центр куба с ребром, равным a, соединен с вершинами нижнего основания. Найти полную площадь поверхности и объем полученной пирамиды.

Ответ. $S = a^2(1+\sqrt{3})$; $V = \frac{a^3}{3}$.

27. Площадь сечения куба, представляющая собой правильный шестиугольник, равна Q. Найти полную площадь поверхности куба.

Ответ. $\frac{8Q}{\sqrt{3}}$.

28. Центр верхнего основания правильной четырехугольной призмы соединен с серединами сторон нижнего основания. Полученная пирамида имеет объем V. Найти объем призмы .

Ответ. $6V$.

29. Около конуса с радиусом основания R описана произвольная пирамида, у которой периметр основания равен $2p$. Определить отношение объемов и отношение боковых поверхностей конуса и пирамиды.

Ответ. $\frac{\pi R}{p}$.

30. В сферу с площадью S вписан прямой конус с высотой h . Определить радиус основания конуса .

Ответ. $\sqrt{h\sqrt{\frac{S}{\pi}} - h^2}$.

31. Шар радиуса R вписан в прямой конус с высотой h. Определить радиус основания конуса.

Ответ. $\sqrt{2hR - h^2}$.

32. В основании четырехугольной пирамиды SABCD лежит ромб ABCD со стороной 4 и острым углом A в 60°. Известно, что SB=4, SA=2, SC=x, SD=y. Определить, при каких значениях x и y объем пирамиды достигает наибольшей величины и вычислить его.

Ответ. $V = 4\sqrt{5}$; $x = \sqrt{40}$; $y = 3\sqrt{2}$.

33. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник ABC со стороной. Прямая l проходит через точку A параллельно BC_1. На прямой l выбрана точка P так, что P и A_1 лежат по одну сторону от плоскости ABC. Найти максимально возможный объем пирамиды PABC, если PQ= $\sqrt{3}$, а точка Q лежит на прямой BC.

Ответ. $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

34. В пирамиде ABCD ребра AB и CD равны 1, AD = AC = BD = 2, BC = x. Определить, при каком значении x объем пирамиды достигает наибольшей величины и вычислить его.

Ответ. $V = \frac{5}{16}$; $x = \frac{\sqrt{66}}{4}$.

35. Основание треугольной пирамиды ABCD с вершиной D – правильный треугольник со стороной 1. Ребро BD перпендикулярно плоскости ABC и равно 1. Точка K лежит на прямой, параллельной BC и проходящей через точку D, а точка S лежит на луче BA. Найти максимально возможный объем пирамиды BC, если KS=3.

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

36. Прямоугольный параллелепипед с длинами ребер 5, 7, 8 см составлен из кубиков размерами 1×1×2 см. Сколько составляют внешний слой толщиной в один кубик?

Ответ. 110.

37. Прямоугольный параллелепипед с длинами ребер 4, 6 и 7 см составлен из кубиков с длиной ребра 1 см. Сколько кубиков осталось в параллелепипеде после того, как удалили весь внешний слой толщиной в один кубик?

Ответ. 40.

38. Прямоугольный параллелепипед с длинами ребер 8, 8 и 15 см составлен из кубиков размерами 2×2×1 см. Затем внешний слой параллелепипеда толщиной в один кубик удалили. Сколько кубиков удалили?

Ответ. 188.

3

9. Ребро куба 6 см. Грани куба выкрасили в красный цвет, а затем разрезали на равные кубики с длиной ребра в 1 см. Сколько кубиков имеют три красные грани? Ни одной красной грани?

Ответ. 8; 64.

40. Прямоугольный параллелепипед со сторонами 5, 5 и 10 см был составлен из кубиков размерами 1×1×2 см. Затем внешний слой этого параллелепипеда толщиной в один кубик был удален и из этих кубиков был составлен новый параллелепипед. Какой объем он имеет?

Ответ. 196.

41. Найти максимальный объем прямоугольного параллеле-пипеда, вписанного в полусферу радиуса $\sqrt{3}$ так, что одна грань его лежит в плоскости большого круга.

Ответ. 4/3.

42. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC, в котором угол A равен 90º, а катеты AB и AC равны соответственно a и $2a$. Высота призмы равна a. Найти площадь сечения призмы плоскостью, которая делит пополам двугранный угол с ребром AB.

Ответ. $\frac{a^2\sqrt{14}}{12}$.

43. На ребре BC правильного тетраэдра SABC выбрана точка D так, что CD=2BD. Через точки A и D перпендикулярно плоскости ABC проведена плоскость. Найти площадь получившегося сечения, если ребро тетраэдра равно $3a$.

Ответ. $\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$.

44. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC, в котором AB=BC=a, $\angle ABC=90^o$. Высота призмы равна a. На ребре AB выбрана точка D так, что AD=DB. Через точки C и D параллельно AC_1 проведена плоскость. Найти площадь получившегося сечения.

Ответ. $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

45. Через вершину M треугольника MNK проведена прямая ℓ, перпендикулярная плоскости этого треугольника. Шар касается всех сторон этого треугольника и прямой ℓ. Найти радиус этого шара, если известно, что расстояние от точки M до центра шара равно $\sqrt{6+\sqrt{3}}$ и MN=MK, $\angle KMN=30°$.

Ответ. 2.

46. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 1 , точка P делит ребро A_1B_1 на две равные части. Найти угол между отрезками AP и AC_1.

Ответ. $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

47. Каков максимальный объем правильной четырехугольной призмы, если ее полная поверхность равна 1?

Ответ. $\frac{1}{6\sqrt{6}}$.

48. Найти объем конуса, если радиус его основания равен 10 см, а угол между высотой конуса и его образующей равен 30^o.

Ответ. $\frac{1000\sqrt{3}}{3}$.

49. Осевым сечением цилиндра является квадрат с диагональю, равной 4 см. Найти объем цилиндра.

Ответ. $4\pi\sqrt{2}$.

50. В шар радиусом 2 см вписан конус, образующая которого составляет с высотой угол 30^o. Найти объем конуса.

Ответ. 3π .

51. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен $\frac{\pi}{4}$. Найти объем пирамиды.

Ответ. $\frac{a^3}{24}$.

52. Найти объем цилиндра, осевое сечение которого есть квадрат и боковая поверхность равна $S = 4\pi$ см^2.

Ответ. 2π.

53. Фигура, заданная на плоскости системой неравенств

$$x^2 + y^2 \geq r^2$$
$$x + y \leq 2r,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ r > 0,$$

вращается вокруг оси OX. При каком значении r объем полученного тела вращения равен 128π?

Ответ. 4.

54. Фигура, заданная на плоскости системой неравенств

$$x^2 + y^2 \le 4r^2$$

$$x + 2y \ge 2r,\ x \ge 0,\ r > 0,$$

вращается вокруг оси OX. При каком значении r объем полученного тела вращения равен 126π?

Ответ. 3.

55. Фигура, заданная на плоскости системой неравенств

$$x^2 + y^2 \ge r^2$$

$$x - 4r \le 2y \le 4r - x,\ x \ge 0,\ r > 0,$$

вращается вокруг оси OY. При каком значении r объем полученного тела вращения равен 160π?

Ответ. 2.

56. Фигура, заданная на плоскости системой неравенств

$$x^2 + y^2 \le r^2$$

$$y - x \le r,\ y \ge 0,\ r > 0,$$

вращается вокруг оси OX. При каком значении r объем полученного тела вращения равен 64π?

Ответ. 4.

57. Фигура, заданная на плоскости системой неравенств

$$x^2 + y^2 \le r^2$$

$$y + x \ge r,\ y - x \ge r,\ r > 0,$$

вращается вокруг оси OX. При каком значении r объем полученного тела вращения равен $\frac{16\pi}{3}$?

Ответ. 2.

58. Найти объем правильного тетраэдра (т.е. треугольной пирамиды, все ребра которой равны) с ребром, равным 2 см.

Ответ. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

59. В шар радиуса 5 см вписан цилиндр с радиусом основания, равным 3 см. Найти объем цилиндра.

Ответ. 72π.

60. Найти поверхность сферы, описанной около параллелепипеда, если стороны основания этого параллелепипеда равны 4 см и 12 см, а диагональ меньшей из боковых граней равна 5 см.

Ответ. 169π.

61. Найти площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, если ее высота равна 3 см, а апофема (т.е. высота треугольника боковой грани) равна 6 см.

Ответ. 162.

62. Найти объем цилиндра, если объем вписанного в него шара равен 36π см^3.

Ответ. 54π .

63. Центры граней правильного тетраэдра служат вершинами нового тетраэдра. Найти отношение их объемов и отношение их площадей поверхностей.

Ответ. $\frac{1}{9}; \frac{1}{27}$.

64. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды в 3 раза больше площади основания. Площадь круга, вписанного в основание, численно равна радиусу этого круга. Найти объем пирамиды.

Ответ. $\frac{2\sqrt{6}}{\pi^3}$.

65. Дан правильный тетраэдр SABC. Под каким углом ребро AB видно из середины ребра SC?

Ответ. $\arccos\frac{1}{3}$.

66. Найти объем правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при вершине равен 90°, а расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания равно d.

Ответ. $\frac{d^3\sqrt{2}}{3}$.

67. Площадь треугольника сечения конуса плоскостью, проходящей через его вершину и составляющий угол 30° с осью конуса, равна площади осевого сечения этого конуса. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания; показать, что этот угол больше 30°.

Ответ. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2} > 30^\circ$.

68. Значение синуса угла при вершине треугольника сечения конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса, равно $\frac{\pi}{9}$. Площадь этого сечения составляет $\frac{1}{8}$ площади полной поверхности конуса. Найти угол между образующей и высотой конуса; показать, что этот угол меньше 30°.

Ответ. $\arcsin\frac{1}{3} < 30^\circ$.

69. Поверхность шара, вписанного в конус, равна площади круга, лежащего в основании конуса. Найти угол между образующей и высотой конуса; показать, что этот угол меньше 45°.

Ответ. $\arcsin\frac{3}{5} < 45^\circ$.

70. Угол при вершине треугольника сечения конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса, равен 60°. Угол между этой плоскостью и основанием конуса равен 45°; высота конуса 3 см. Найти объем конуса; показать, что этот объем больше 47 см^3.

Ответ. $15\pi > 47$.

71. Радиус окружности, по которой шар, вписанный в конус, касается поверхности конуса, составляет $\frac{1}{3}$ радиуса окружности его основания. Найти угол между образующей и высотой конуса; показать, что этот угол меньше 45°.

Ответ. $\arcsin\frac{2}{3} < 45^\circ$.

72. В конус вписана сфера. Угол между осью и образующей конуса равен α; площадь боковой поверхности конуса равна S. Найти площадь поверхности сферы.

Ответ. $\frac{4S\sin\alpha\cos^2\alpha}{(1+\sin\alpha)^2}$.

73. В конус вписана сфера. Угол между осью и образующей конуса равен α; объем конуса равен V. Найти площадь поверхности сферы.

Ответ. $\frac{4\cos\alpha\sqrt[3]{9\pi V^2\sin^2\alpha\cos\alpha}}{(1+\sin\alpha)^2}$.

74. В сферу вписан конус. Угол при основании треугольника осевого сечения равен α; боковая поверхность конуса равна 5. Найти площадь этой сферы.

Ответ. $\dfrac{5}{\sin^2\alpha\cos\alpha}$.

75. В конус вписан шар. Объем шара равен *V*; угол между осью и образующей конуса равен α. Найти объем конуса.

Ответ. $\dfrac{V(1+\sin\alpha)^3}{\cos^2\alpha\sin\alpha}$.

76. В сферу вписан конус. Угол при основании треугольника осевого сечения конуса равен α; площадь сферы равна *S*. Найти объем конуса.

Ответ. $\dfrac{\pi}{3}(\dfrac{S}{4\pi})^{3/2}\sin^3 2\alpha \,\mathrm{tg}\alpha$.

77. В правильной треугольной призме высота равна *H*. Через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания проведена плоскость, пересекающая боковые грани по отрезкам составляющим угол 2α. Найти площадь сечения.

Ответ. $\dfrac{H^2\sin 2\alpha}{2(1-\sin^2\alpha)}$.

78. В правильной треугольной призме через сторону нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания проведена плоскость, пересекающая боковые грани по отрезкам, составляющим угол 2α. Площадь получившегося сечения равна *S*. Найти высоту призмы.

Ответ. $\sqrt{\dfrac{2S(1-4\sin^2\alpha)}{\sin 2\alpha}}$.

79. В правильной треугольной призме через сторону нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания проведена плоскость, пересекающая боковые грани по отрезкам, составляющим угол 2α. Площадь получившегося сечения равна *S*. Найти площадь основания призмы.

Ответ. $S\,\mathrm{tg}\alpha\sqrt{3}$.

80. В правильной треугольной призме высота равна *H*. Через сторону нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания проведено сечение с площадью *S*. Найти величину угла между отрезками, вдоль которых эта плоскость пересекается с боковыми гранями.

Ответ. $2\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{4H^4+48S^2}-2H^2}{6S}$.

81. В правильной треугольной призме высота равна *H*. Через сторону нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания проведена плоскость, пересекающаяся с боковыми гранями по отрезкам, составляющим угол 2α. Найти площадь боковой поверхности призмы.

Ответ. $\dfrac{6H^2\sin\alpha}{\sqrt{1-4\sin^2\alpha}}$.

82. В треугольнике ABC AC=BC=*a*, ∠ACB=120°. Отрезок PA перпендикулярен плоскости ABC, расстояние точки P от прямой BC равно *a*. Найдите расстояние от точки P до плоскости ABC.

Ответ. $\dfrac{a}{2}$.

83. Катет и гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника лежат в разных гранях прямого двугранного угла. Вершина прямого угла треугольника удалена от ребра на расстояние, равное 2, а вершина острого угла – на расстояние, равное $\sqrt{15}$. Найдите площадь треугольника.

Ответ. 10.

84. Дан квадрат PQRT со стороной равной 1, AQ $\perp$ PQR, AQ=1. Найдите расстояние между прямыми PR и AT.

Ответ. $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

85. ABCD — ромб со стороной равной m, угол A равен 60°, отрезок AM перпендикулярен плоскости ABC, AM = $m/2$. Найдите расстояние от точки M до прямой CD.

Ответ. m.

86. Через сторону ромба ABCD проведена плоскость α. Сторона AB составляет с этой плоскостью угол 30º. Найдите угол между плоскостью ромба и плоскостью α, если острый угол ромба равен 45º.

Ответ. 45º.

87. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 4, а расстояние от центра основания до бокового ребра равно 2. Найдите угол между смежными боковыми гранями.

Ответ. $2\ \mathrm{arctg}\sqrt{2}$.

88. Через вершину прямого угла C равнобедренного треугольника ACB проведена плоскость α, параллельная гипотенузе и составляющая с катетом угол 30º. Найдите угол между плоскостью ACB и плоскостью α.

Ответ. 45º .

89. В тетраэдре DABC ABC – правильный треугольник со стороной, равной $2\sqrt{3}$, DA = DB = DC, DO $\perp$ ABC, DO = $\sqrt{3}$. Найдите угол между AC и плоскостью BDC.

Ответ. $\arcsin\frac{3}{4}$.

90. В ромбе ABCD угол BAD равен 60º. Через сторону ромба AD проведена плоскость α. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью ромба, если угол наклона ребра AB к плоскости α равен 45º.

Ответ. $\mathrm{arctg}\sqrt{2}$.

91. Ребро правильной четырехугольной пирамиды PABCD образует с плоскостью основания ABCD угол α. Найти полную поверхность этой пирамиды, если площадь сечения APC равна S.

Ответ. $\frac{S}{\sin\alpha}\sqrt{2-\cos\alpha}+2S\mathrm{ctg}\alpha$.

92. Угол APC в правильной четырехугольной пирамиде PABCD, вершиной которой является точка P, равен β, а сторона основания равна a. Найти боковую поверхность этой пирамиды.

Ответ. $\frac{a^2}{\sin{}^{\beta}\!/_{2}}\sqrt{2-\sin{}^{\beta}\!/_{2}}$.

93. Ребро правильной четырехугольной пирамиды PABCD образует с плоскостью основания ABCD угол α. Найти полную поверхность этой пирамиды, если высота пирамиды равна H.

Ответ. $H^2\mathrm{ctg}^2\left(2+\dfrac{\sqrt{2-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}\right)$.

94. Ребро правильной четырехугольной пирамиды PABCD равно a и образует с плоскостью основания ABCD угол α. Найти боковую поверхность этой пирамиды.

Ответ. $2a^2\cos\alpha\sqrt{2-\cos^2\alpha}$.

95. Ребро правильной четырехугольной пирамиды PABCD равно a, а плоский угол при вершине P равен β. Найти объём этой пирамиды.

Ответ. $\dfrac{2}{3}a^3(1-\cos\beta)\sqrt{\cos\beta}$.

96. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны AC=20, AB=13, BC=21. Диагональ A_1C составляет с плоскостью C_1B_1BC угол в 30°. Найти площадь боковой поверхности призмы.

Ответ. $216\sqrt{11}$.

97. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ высота полной пирамиды равна 4, а стороны оснований 1 и 2 соответственно. Через середину стороны A_1B_1 перпендикулярно плоскости основания и параллельно его диагонали проведена плоскость. Найти площадь полученного сечения.

Ответ. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

98. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD сторона основания равна 2 и боковое ребро равно 4. Через точки K и L, являющиеся серединами сторон основания AB и AD соответственно параллельно ребру AS проведена плоскость. Найти площадь полученного сечения.

Ответ. $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

99. В правильной усеченной треугольной пирамиде $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны $8\sqrt{3}$ и $6\sqrt{3}$ соответственно. Площадь сечения, проведенного через верхнюю вершину перпендикулярно основанию и параллельно противоположной стороне верхнего основания равна $4\sqrt{2}$. Найти площадь боковой поверхности пирамиды и высоту полной пирамиды.

Ответ. $S_{бок} = 105\sqrt{3}$; $H = 8\sqrt{6}$.

100. В треугольной пирамиде SABC все боковые ребра и все боковые грани наклонены к плоскости основания под равными углами (ребра под своим углом, а грани – под своим). Длина бокового ребра равна 2, а высоты – 1. Найти площадь полной поверхности пирамиды и ее объем.

Ответ. $V = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$; $S_{полн} = \dfrac{9}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{7})$.

101. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а высота равна h. Найти радиус вписанного шара.

Ответ. $\dfrac{ah}{a+\sqrt{12h^2+a^2}}$.

102. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а радиус вписанного шара равен r. Найти высоту пирамиды.

Ответ. $\dfrac{2a^2r}{a^2-12r^2}$.

103. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, а высота равна h. Найти радиус описанной сферы.

Ответ. $\dfrac{2h^2+a^2}{4h}$.

104. В правильной треугольной пирамиде высота равна h, а радиус вписанного шара равен r. Найти сторону основания.

Ответ. $\dfrac{2\sqrt{3}rh}{\sqrt{h^2-2rh}}$.

105. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, а радиус описанной сферы равен R. Найти высоту пирамиды.

Ответ. $R\pm\sqrt{R^2-\dfrac{a^2}{2}}$.

106. В основании правильной треугольной пирамиды лежит треугольник с высотой 3 дм. Двугранный угол между плоскостью основания и плоскостью, проведенной через сторону основания перпендикулярно противолежащему боковому ребру пирамиды, равен 30°. Найти объём пирамиды.

Ответ. 6 .

107. Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами, равными 3 дм, 5 дм, и углом 120° между ними. Найти объём призмы, если ее боковая поверхность равна 60 дм^2.

Ответ. $15\sqrt{3}$.

108. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с острым углом 60°. Диагональ большей из боковых граней равна 8 дм и образует с боковым ребром призмы угол 30°. Найти объём призмы.

Ответ. 24 .

109. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 7 дм. Двугранный угол между плоскостью основания и боковой гранью равен 60°. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

Ответ. $42\sqrt{3}$.

110. Высота правильной треугольной призмы равна 3 дм. Через среднюю линию треугольника нижнего основания и ту вершину верхнего основания, которая не лежит на параллельной этой средней линии стороне верхнего основания, проведена плоскость. Двугранный угол между этой плоскостью и основанием равен 45°. Найти объём призмы.

Ответ. $36\sqrt{3}$.

Раздел III. НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ

Хорошо известно, отдельные задачи предлагаемые в олимпиадных заданиях, несмотря иногда на простой внешний вид и обычность постановки, решению поддаются с большим трудом. Задачи такие называют нестандартными и бывают они разных видов. Некоторые из них выглядят необычно лишь внешне, другие, наоборот, выглядят совершенно привычно, но решить и те, и другие обычными, хорошо известными приемами не удается. Нестандартные задачи задействуют практически все разделы школьной математики, но наибольшую известность и трудность приобрели задачи геометрические и задачи с параметрами (последние очень часто встречаются на вступительных экзаменах). Перечислить же все особенности нестандартных задач просто невозможно.

Решение нестандартных задач требует от учащегося определенной свободы владения разделами школьной программы по математике, хорошей сообразительности и достаточно высокого уровня логической культуры. И еще – достаточной психологической подготовленности (т.е. школьник должен нарешать и ознакомиться как можно с большим числом задач такого рода). Также отметим, что решение нестандартных задач ни в коей мере не выходит за рамки программы для поступающих в вузы и не требует никаких сведений из высшей математики (т.е. никаких других дополнительных сведений, не входящих в школьную программу).

Ниже, на примерах решения конкретных задач, излагаются некоторые методы решения задач повышенной трудности (нестандартных задач), которые после внимательного прочтения превратят эти задачи в стандартные (в какой-то мере), хотя, конечно, никакого общего метода решения задач повышенной трудности предложено не будет, да его и нет! В основном будут рассмотрены различные типы задач с параметрами и в конце нашего раздела будут предложены аналогичные задачи для самостоятельного решения с целью укрепления полученных навыков. Все задачи снабжены ответами (конечно, возможны различного рода ошибки при издании такой литературы и мы будем признательны, если Вы нам на них укажите). Отметим также, что большинство задач (как разбираемых, так и предлагаемых для самостоятельного решения) были предложены в свое время на олимпиадах школьников по математике в МГУ ПС (МИИТе).

Задача 1. При каких a уравнение $6(ax - 1) - a = 2(a + x) - 7$ имеет бесконечно много решений?

Решение. Преобразуем уравнение, выразив x как функцию от a:

$$6ax - 6 - a = 2a + 2x - 7 \text{ или } 6ax - 2x = 3a - 1$$

$$\text{или } 2x(3a - 1) = 3a - 1.$$

Если $a \neq \frac{1}{3}$, то $2x = 1$ и $x = \frac{1}{2}$. Если же $a = \frac{1}{3}$, то левая и правая части уравнения обращаются в 0 при любом x, т.е. x в этом случае – любое действительное число.

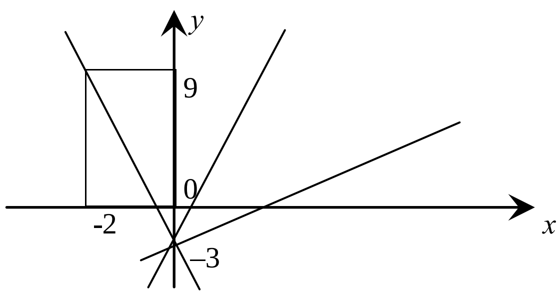
Ответ: $a = \frac{1}{3}$.

Задача 2. При каком a прямая $y = ax - 3$ проходит через точку A(-2, 9)?

Решение: Подставим координаты точки A в наше уравнение: $9 = -2a - 3$ или $a = -6$

Ответ: $a = -6$

Комментарий: прямая $y = ax - 3$ при любом действительном a проходит через точку (0, –3) и картина пучка прямых такова



Нам остается из этого пучка выбрать ту прямую, которая пройдет через точку A. Закончить решение задачи, вычислив a из геометрических соображений.

Задача 3. При каких a система $\begin{cases} 2x + (a+1)y = -1 \\ (a-2)x + 27y = 4{,}5 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

Решение: Выразим x из первого уравнения через y и a и подставим во второе $2x = -1 - (a + 1)y$ (второе уравнение предварительно умножим на 2:$(a - 2) \cdot 2x + 54y = 9$) и получим

$(a - 2)(-1 - (a + 1)y + 34y = 9$

или $2 - a - (a + 1)(a - 2)y + 54 = 9$

или $2 - a - (a^2 - a - 2)y + 54y = 9$

или $(a^2 - a - 2 - 54)y = (7 + a)$

или $y(a^2 - a - 56) = (7 + a)$

или $y(a - 8)(a + 7) = (a + 7)$.

Если a = –7, то при любом y обе части равны 0 и бесконечно много пар $\langle x,y\rangle$ (это обозначение упорядоченной пары чисел x, y) удовлетворяют уравнению (x выбирает по y и a).

Ответ: $a = -1$

Комментарий: как и в задачах 1 и 2 из решения видно, что других a, кроме a = –1, нет. Дадим также геометрическую картину задачи 3: $ax + by = c$ есть уравнение прямой на плоскости. Поэтому у нас имеются две прямые на плоскости и бесконечно много решений может быть только тогда, когда эти две прямые совпадут, т.е. первое и второе уравнения системы должны быть пропорциональны, т.е. $\frac{2}{a-2}=\frac{a+1}{27}=\frac{-1}{4{,}5}=\frac{-2}{9}(a\neq 2)$; случаи a = 2 рассматривается отдельно и в этом случае... (что будет в этом случае??). Итак: 18 = –2a + 4 или a = –7 и 9a + 9 = –54 или a =-7 и такое a – единственно.

Задача 4. При каких a и $в$ система уравнений $\begin{cases} x+в^2y=a+1 \\ вx+(3-a)y=в \end{cases}$ имеет бесконечно много решений? Если $в$ = 0, то система имеет вид $\begin{cases} x=a+1 \\ (3-a)y=0 \end{cases}$ и, полагая a =3, получаем бесконечно много решений <x= 4, y – любое действительное число>. Используя комментарий к предыдущей задаче, имеем $\frac{в}{1}=\frac{3-a}{в^2}=\frac{в}{a+1}$ или $в^3=3-a$ и $в^3$ = (3 – a)(a + 1) или (3 – a) = (3 – a)(a +1). Случай a = 3 и $в$ = 0 мы уже разобрали и остается a +1 = 1, т.е., a = 0, а тогда $в=\sqrt[3]{3}$

Ответ: $в$ = 0, a = 3 или a = 0, $в=\sqrt[3]{3}$.

Комментарий: сделайте проверку и разберите случай a = –1.

Обратимся теперь к неравенствам.

Задача 5. Для всех a решить неравенство $a(x-1) > x-2$.

Решение: Рассмотрим различные значения параметра a: если a = 1, то $x - 1 > x - 2$ верно при любых x (значение a = 1 получится как граничное, если выразить x через a: $x(a-1) > a-2$. Если a > 1, то $x>\frac{a-2}{a-1}$ и, наконец, если a <1, то $x>\frac{a-2}{a-1}$.

Ответ: при a = 1 x – любое действительное число; при a > 1 $x>\frac{a-2}{a-1}$ и при a < 1 $x>\frac{a-2}{a-1}$.

Задача 6. Найти такие a, при которых неравенство $a^2 + 5ax - 6 \geq 0$ выполняется для любых $x\in[-1{,}1]$?

Замечание это неравенство при фиксированном a является линейным по x.

Решение: $5ax > 6 - a^2$. Нетрудно видеть, что a = 0 не подходит. Пусть a > 0, тогда $x\geq\frac{6-a^2}{5a}$ и в эту область должны попасть все $x\in[-1{,}1]$, т.е. $\frac{6-a^2}{5a}\leq -1$ и, с учетом a > 0, $6 - a^2 + 5a \leq 0$ или $a^2 - 5a - 6 \geq 0$. Так как $a_{1,2}$ = 6 и –1, то a > 6. Случай a < 0 разбирается аналогично (разберите!) и в этом случае $a \leq -6$.

Ответ: a > 6.

Задача 7. Найти все a такие, что для любого $в$ найдется такое c, при котором система $\begin{cases} вx-y=ac^2 \\ (в-6)x+2вy=c+1 \end{cases}$ имеет решения.

Комментарий. Возвращаясь к геометрической интерпретации из комментария к задаче 3 и опуская почти очевидные доказательства, отметим, что для того чтобы система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее главный определитель не был равен 0, т.е.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = в_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = в_2 \end{cases} \text{ и } a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22} \neq 0.$$

Если же главный определитель равен нулю, то для того, чтобы система имела решение (в этом случае их будет бесконечно много) необходимо и достаточно, чтобы уравнения были пропорциональны.

Решение: $в \cdot 2в + в - 6 = 2в^2 + в - 6 = 0$

$в_{1,2} = -2$ и $\frac{3}{2}$.

(при других $в$ независимо от a и c система имеет решение).

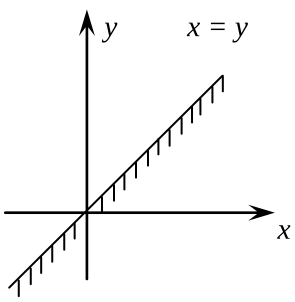
Для $в = -2$ имеем $\begin{cases} -2x - y = ac^2 \\ -8x - 4y = c + 1 \end{cases}$ или $\left.\begin{matrix} 2x + y = -ac^2 \\ 2x + y = -\frac{c+1}{4} \end{matrix}\right\}$ и поэтому $ac^2 = \frac{c+1}{4}$ или $4ac - c - 1 = 0$. Для всякого a должно существовать c такое, чтобы уравнение выполнилось, т.е. необходимо $Д(a) \geq 0$ ($Д(a)$ – дискриминант), или $1 + 16a \geq 0$, т.е. $a \geq -\frac{1}{16}$; если же $в = \frac{3}{2}$, то, разбирая второй случай аналогично первому (обязательно проделайте выкладки) получим, что $a \geq -\frac{1}{12}$.

Ответ: $-\frac{1}{16} \leq a \leq \frac{1}{12}$.

Задача 8. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств $\begin{cases} 2y - 5x \geq 4a + 12 \\ x + y \geq -3a + 4 \\ 3y - x \leq 5a + 6 \end{cases}$ имеет единственное решение? Указать это решение.

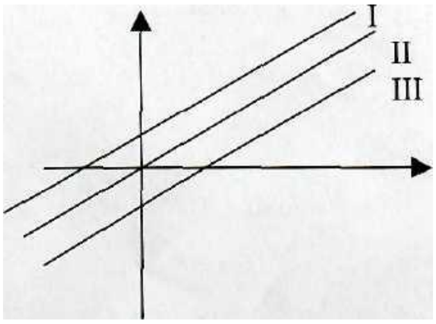
Комментарий. Рассмотрим неравенство первой степени на плоскости $ax + вy + c \geq 0$. Множеством его решений служит одна из двух полуплоскостей, на которые прямая $ax + вy + c = 0$ разбивает плоскость R^2 (сама прямая включается в одну из полуплоскостей).

Пример: $x - y \geq 0$, множество решений – «нижняя» полуплоскость (достаточно проверить неравенство одной точкой, не лежащей на прямой).



Решение: Пусть I, II и III – прямые, которые получаются, если знак неравенства заменить на знак равенства в 1-ом, 2-ом и 3-ем неравенствах (через I, II и III также обозначим и множество решений первого, второго и третьего неравенств). При фиксированном значении параметра рассмотрим три возможности: а) некоторые прямые параллельны или совпадают (м.б. частично): в этом случае всегда решений либо нет, либо их бесконечно много (сделаем еще одно важное методологическое замечание: данная задача относится к подклассу задач, при решении которых важно тщательно, подробно и скрупулезно разобрать все случаи, которые могут иметь место (анализ задачи) и затем все их решения объединить (синтез задачи); очень часто все кажется предельно ясным, однако все случаи нужно рассмотреть, не оставив никаких неясностей и, что особенно важно, понятно и доходчиво изложить на бумаге свое решение; в противном случае решение не будет считаться полным). Продемонстрируем сказанное на случае а), оставляя другие случаи читателю.

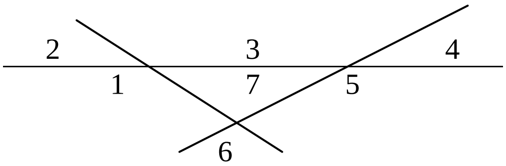
Итак, некоторые из прямых параллельны. Случай al: все три прямые параллельны



Если полуплоскости решений 1-ой и II-ой прямых направлены в стороны «друг от друга», то решений нет. Если же они направлены «друг к другу», то в случае, если эта полоса не пересекается с множеством решений III, то решений нет, а если пересекается, то решений бесконечно много (при этом могут совпадать как все три прямых, так и ровно две из них).

Случай а2: ровно две прямые параллельны или совпадают, третья прямая их пересекает. Снова, если множества решений I и II прямой направлены в стороны «друг от друга», то решений нет, а иначе решений бесконечно много.

Случай *в*: все три прямые пересекаются. Подслучай в1: пересекаются в трех различных точках.



Тогда множеством решений (в бесконечном количестве) будет по крайней мере одна из семи областей (все зависит от выбора полуплоскостей, служащих решением одного из неравенств). Подслучай в2: три прямые пересекаются в одной точке. Тогда решение единственное. А для этого необходимо и достаточно решить систему уравнений, полученных из исходных неравенств $\begin{cases} 2y - 5x \geq 4a + 12 \\ x + y \geq -3a + 4 \\ 3y - x \leq 5a + 6 \end{cases}$. Это система трех уравнений линейных с тремя неизвестными.

Перепишем ее так: $\left.\begin{aligned} x + y + 3a &= 4 \\ 5x - 2y + 4a &= -12 \\ x - 3y + 5a &= -6 \end{aligned}\right\}$. Из второго и третьего уравнений вычтем первое, умноженное сначала на 5, а затем на 1. Получим равносильную систему $\left.\begin{aligned} x + y + 3a &= 4 \\ -4y + 2a &= -10 \\ -7y - 11a &= -32 \end{aligned}\right\}$ или $\left.\begin{aligned} x + y + 3a &= 4 \\ 2y - a &= 5 \\ 7y + 11a &= 32 \end{aligned}\right\}$. Теперь к третьему уравнению прибавим второе, умноженное на 11 и получим $\left.\begin{aligned} x + y + 3a &= 4 \\ 2y - a &= 5 \\ 29y &= 87 \end{aligned}\right\}$. Отсюда $y = 3$, $a = 1$ и $x = -2$.

Ответ: единственное решение исходная система неравенств имеет при $a = 1$. Решение есть $x = -2$ и $y = 3$.

Задача 9. Найти все значения p такие, что корни уравнения $(p - 3)x^2 - 2(p + 3)x + p + 6 = 0$ равны.

Решение: для выполнения условия необходимо и достаточно, чтобы Д(p) =0, т.е. $(p + 3)^2 - (p - 3)(p + 6) = 0$ или $p^2 + 6p + 9 - p^2 - 3p + 18 = 0$ или $3p = -27$, а $p = -9$.

Ответ: $p = -9$

Задача 10. Найти все значения a, при которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a \\ xy = a - \dfrac{1}{2} \end{cases}$ имеет ровно два решения?

В общем случае система имеет 4^е решения: (x,y), (y,x), $(-x,-y)$, $(-y,-x)$. Число решений можно уменьшить в двух случаях: а) $x=y$: решениями будут (x,x) и $(-x,-x)$; б) $x = -y$: решениями будут $(x,-$

x) и ($-x,x$) (в случае $x=-x \Leftrightarrow x=0$ имеем $(0,y)$, $(0,-y)$, $(-y,0)$, $(y,0)$ и если $y=-y$, то решение только одно).

Если $x = y$, то система примет вид $\begin{cases} 2x^2 = 2a \\ x^2 = a - \dfrac{1}{2} \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2 = a \\ x^2 = a - \dfrac{1}{2} \end{cases}$ – эта система решений не имеет. Если же $x = -y$, то имеем $\begin{cases} 2x^2 = 2a \\ -x^2 = a - \dfrac{1}{2} \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2 = a \\ -x^2 = a - \dfrac{1}{2} \end{cases}$, т.е. $2a = \dfrac{1}{2}$ или $a = \dfrac{1}{4}$.

Необходимо теперь убедиться, что при $a = \dfrac{1}{4}$ система будет иметь ровно два решения.

Ответ: $a = \dfrac{1}{4}$.

Комментарий. Попробуйте самостоятельно дать геометрическую иллюстрацию решения задачи, учитывая, что $x^2 + y^2 = 2a$ – это уравнение окружности радиуса $\sqrt{2a}$, а $xy = a - \dfrac{1}{2}$ – график обратно пропорциональной зависимости.

Задача 11. Найти все значения параметра a такие, что существует единственная пара < x, y >, удовлетворяющая уравнению $ax^2 + 3(a + 1)y^2 - 4axy + 2ax - 12y - 3a + 12 = 0$?

Решение: Выделим полный квадрат сначала по переменной x, а затем по переменной y:
$ax^2 - 4axy + 2ax + (3(a + 1)y - 12\,y - 3a + 12) = a(x^2 - 2x(2y + 1)\,(2y + 1)^2 - - (2y + 1)^2 + (3(a + 1)^2 y - 12\,y - 3a + 12) =$
$a(x - 2y - 1)^2 - 4y^2a - 4ya - a + 3ay^2 + 3y^2 - 12y - 3a + 12 =$
$a(x - 2y - 2)^2 - ay^2 + 3y^2 - 4ay - 4a - 12y + 12 =$
$a(x - 2y - 2)^2 - a(y^2 + 4y + 4) + 3y^2 - 12y + 12 =$
$a(x - 2y - 2)^{2\,-} a(y + 2)^2 + 3(y^2 + 4y + 4) =$
$a(x - 2y - 2)^2 + (3 - a)(y + 2)^2 = 0.$

Для того чтобы исходное уравнение имело единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы было $a>0$ и $3 - a > 0$, т.е. (*) $0 < a < 3$. Если a таково, что оба коэффициента при квадратах положительны и решение может быть только, если $\begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{cases}$ или $\left.\begin{matrix} y = -2 \\ x = -2 \end{matrix}\right\}$.

Если хотя бы один из коэффициентов равен 0 ($a = 0$ или $a = 3$), то (в первом случае) x может быть любым (или, во втором случае), y может быть любым. Если же $a < 0$ или $a > 3$, то коэффициенты при квадратах имеют разные знаки и уравнение примет вид $a(x - 2y - 2)^2 - (a - 3)(y + 2)^2$, обе части уравнения будут положительны и мы будем иметь

$$\sqrt{\frac{a}{a-3}}(x - 2y - 2) = \pm(y + 2).$$

В этих уравнениях мы можем задавать y и по нему находить значение x (как в случае «+», так и «-»), т.е. при невыполнении условия (*) решений всегда будет более одного.

Ответ: $0 < a < 3$

Комментарий. Мы дали метод приведения многочлена от двух переменных к сумме двух квадратов (в общем случае может оказаться и один квадрат!).

Описание точного алгоритма займет страницы две, и мы его здесь описывать не будем, однако заметим, что нужно сначала выделить квадрат по одной из переменных, а затем в оставшемся выражении (туда будет входить только одна переменная, другая) по этой другой переменной.

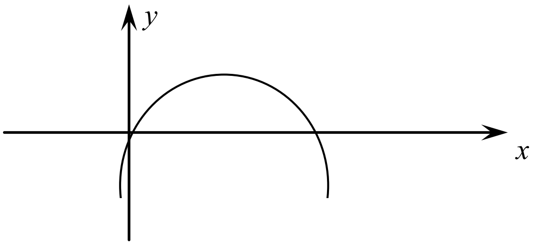
Задача 12. График параболы $ax^2 + вx + c = y$ расположен на координатной плоскости так, что вершина его находится в первой четверти, ветви направлены вниз и точка пересечения с осью Oy лежит ниже оси Ox. Найти знак выражения $G = 4ac - 3в^2 + 6a + 1c$.

Решение: Нарисуем картинку, соответствующую условию.

Отметим, что $a < 0$, $c < 0$ и Д > 0. Имеем

$G = 4ac - в^2 - 2в^2 + 6a + 7c = -Д - 2в^2 + 6a + 7c,$

т.е. заключаем, что $G < 0$.



Ответ: $G < 0$.

Задача 13. При каких a уравнение

$$ax^3 + 3x^2 + a^2x + 3a = 0$$

будет иметь ровно один действительный корень.

Решение: Попробуем разложить левую часть на множители: $ax^3 + a^2x + 3x^2 + 3a = ax(x^2 + a) + 3(x^2 + a) = (x^2 + a)(ax + 3) = 0$.

Если $a < 0$, то левая часть раскладывается на три различных сомножителя и мы будем иметь по крайней мере два различных корня ($a = -в^2$,то корни будут $в$ и $-в$ и $в \neq 0$!).

Если $a = 0$, то корень один: $x = 0$.

Если $a > 0$, то снова один корень $x = \dfrac{3}{a}$.

Ответ: $a \geq 0$.

Задача 14. Найти наибольшее целое a такое, что график функции $y = (a + 4)x^2 - 2ax + 2a - 6$ целиком лежит ниже оси Ox.

Решение: Очевидно, что $a + 4 < 0$, т.к. в противном случае либо график – прямая, либо ветви параболы направлены вверх и в любом случае график не может весь лежать ниже оси Ox. Потребуем еще, чтобы было $Д < 0$ (тогда не будет корней и график будет лежать целиком ниже оси Ox).

$Д = 4a^2 - 4(a + 4)(2a - 6) < 0$ или

$4a^2 - 8a^2 - 8a + 96 < 0$ или

$-4a^2 - 8a + 96 < 0$ или

$a^2 + 2a - 24 > 0$ или

$$a > -1 + \sqrt{25} \text{ или } a > -1 - \sqrt{25},$$

а так как $a < -7$, то $a < -1 - 5 = -6$. Следовательно, наибольшее целое $a = -7$.

Ответ: $a = -7$.

Задача 15. Найти все a такие, для которых система $\begin{cases} y \geq x^2 + 2a \\ x \geq y^2 + 2a \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение: Заметим, что если пара $<x,y>$ есть решение системы при некотором фиксированном a, то пара $<y,x>$ также является решением системы. Отсюда следует, что $x = y$ и система имеет вид $x \geq x^2 + 2a$ или $x^2 - x + 2a < 0$ и данное неравенство должно иметь только одно решение, т.е. $Д = 1 - 8a = 0$ или $a = \dfrac{1}{8}$.

Ответ: $a = \dfrac{1}{8}$.

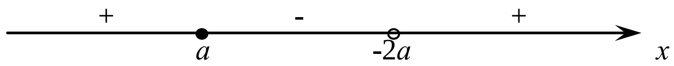
Комментарий. Симметричные системы (неравенств, уравнений) встречаются достаточно часто.

Задача 16. Для всех a решить неравенство $\frac{x-a}{2a+x} \le 0$.

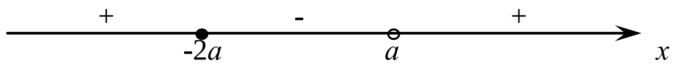
Решение: Исходное неравенство решаем методом интервалов, рассмотрев три случая:

1) $a = 0$, тогда левая часть равна 1 и решений нет;

2) $a < 0$, тогда $x \in [a, -2a]$;



3) $a > 0$, тогда $x \in [-2a, a]$.



Задача 17. Найти все a такие, что действительные корни уравнения $4ax^2 - 5x + a = 0$ удовлетворяют условию $x_1^2 + x_2^2 < 8{,}5$.

Комментарий. Если x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + вx + c = 0$, то (теорема Виета) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{в}{a}\right)^2 - \frac{2c}{a}$.

Решение: Используя комментарий, получим

$$\left(\frac{5}{4a}\right)^2 - 2\frac{a}{4a} < 8{,}5 = \frac{17}{2} \text{ или } \frac{25}{16a^2} - \frac{1}{2} < \frac{17}{2} \text{ или } \frac{25}{16a^2} < 9 \text{ или } \left|\frac{5}{4a}\right| < 3 \text{ или } -3 < \frac{5}{4a} < 3 \text{ или}$$

1. $a > 0$ $\quad$ $-12a < 5 < 12a$ или $\left(a > -\frac{5}{12} \text{ и } a > \frac{5}{12}\right)$, т.е. $a > \frac{5}{12}$.

2. $a < 0$ $\quad$ $-12a > 5 > 12a$ или $\left(a > -\frac{5}{12} \text{ и } a < \frac{5}{12}\right)$, т.е. $a < -\frac{5}{12}$.

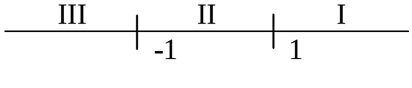
Однако еще нужно потребовать, чтобы $Д > 0$ (мы требуем, чтобы корни были различны) или $25 - 16a^2 > 0$, т.е. $a^2 < \frac{25}{16}$ или $|a| < \frac{5}{4}$ или $-\frac{5}{4} < a < \frac{5}{4}$. Учитывая еще ограничения выше, получим $a \in \left(-\frac{5}{4}; -\frac{5}{12}\right) \cup \left(\frac{5}{12}; \frac{5}{4}\right)$.

Ответ: $\frac{5}{12} < |a| < \frac{5}{4}$.

Задача 18. Для всех значений a решить неравенство $|x - 9a^2| \le 2 - |6a - 3 - x|$.

Комментарий. Данное неравенство содержит модуль (и не один!). Следовательно, нужно разобрать случаи, раскрывая модуль. Однако в данном случае это будет сделать довольно сложно. Заметим, что $|x - 9a^2| + |6a - 3 - x| \le 2$ и, т.к. $|x + y| \le |x| + |y|$, получим $|x - 9a^2 + 6a - 3 - x| \le 2$ или $|9a^2 - 6a + 3| \le 12$. Теперь смотри решение.

Решение: Выражение $9a^2 - 6a + 3 > 0$ при всех a (нужно убедиться, что соответствующий дискриминант меньше нуля). Однако, $9a^2 - 6a + 3 > 2$, т.е. $9a^2 - 6a + 1 > 0$, т.к. $(3a - 1)^2 > 0$. Таким образом, при всех $a \ne \frac{1}{3}$ наше исходное неравенство решений иметь не будет. Если же $a = \frac{1}{3}$, то неравенство исходное имеет вид $|x - 1| + |x + 1| \le 2$. Решаем это неравенство, разбив область изменения x так



если $x > 1$,то $x – 1= 2x < 2$ или $x < 1$ (нет решений),
если $x < –1$,то $–x + 1 – x – 1 < 2$ или $x > –1$ (нет решений), наконец,
если $–1 \le x \le 1$,то $–x + 1 + x + 1 \le 2$или $2 \le 2$ и всякое x из отрезка $[-1;1]$ есть решение.

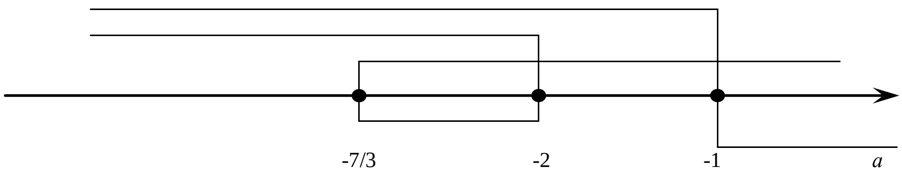
Ответ: при $a \ne \frac{1}{3}$ – нет решений; при $a = \frac{1}{3}$ $x \in [-1;1]$.

Задача 19. Найти все *a,* при которых уравнение $(x^2 + 4x)$ $2|x\ a| + 2\ a = 0$ имеет ровно два решения.

Решение: Разберем случаи с модулем.

1. $x > a$. Тогда уравнение имеет вид $x^2 + 4x – 2x + 2a + 2 – a = 0$ или $x^2 + 2x + 2 + a = 0$ или $(x +1)^2 = –a – 1$ и $–a –1 \ge 0$ (чтобы были корни), т.е. $a \le –1$. Тогда $x_{1,2} = –1 \pm \sqrt{-a-1}$; $–1 + \sqrt{-a-1} \ge a$ или $\sqrt{-a-1} \ge a +1$ или $a \le –1$ (т.к. левая часть неотрицательна), а правая – не положительна на ОДЗ на *a*!); $–1 – \sqrt{-a-1} \ge a$ также должно быть или $\sqrt{-a-1} \le –a – 1$ (обе части положительны) или $–a – 1< a^2 + 2a + 1$ или $a^2 + 3a + 2 \ge 0$ или (с учетом ОДЗ) $a \le –2$.

2. $x < a$. Тогда наше уравнение будет иметь вид $x^2 + 4x + 2x – 2a + 2 – a – 0$ или $x^2 + 6x – 3a + 2 – 0$. Тогда $x_{1,2} = -3\sqrt{9+3a-2} = -3 \pm \sqrt{3a+7}$ и необходимо $3a+7 \ge 0$ или $a \ge -\frac{7}{3}$; $-3+\sqrt{3a+7} < a$ или $\sqrt{3a+7} < a+3$или (обе части на ОДЗ положительны) $3a +7 < a^2 + 6a + 9$ или $a^2+3a+2>0$ или $a>-1$ или $-\frac{7}{3} \le a < -2$. Наконец, требуем $-3+\sqrt{3a+7} < a$ или $\sqrt{3a+7} < a+3$ или $\sqrt{3a+7} > -a-3$ и на ОДЗ это всегда верное неравенство, т.е. $a > -\frac{7}{3}$. Рассмотрим теперь ось параметра *a* и количество имеющихся корней для промежутков (мы оставляем критические точки (где дискриминанты обратились в 0) на рассмотрение читателю!; каждая линия над областью соответствует одному корню).



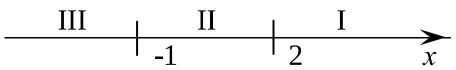
Точки оси для параметра *a,* над которыми ровно две линии и войдут в ответ, т.е. $a \in \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right)$ или $a \in (-2, +\infty)$. Еще раз напомним: рассмотрите отдельно т.т. $-\frac{7}{3}$, –2, –1.

Ответ: $a \in \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right) \cup (-2, +\infty)$.

Задача 20. При каждом значении параметра *a* решить уравнение $|x+1| + a|x-2| = 3$.

Комментарий. Задача, стратегически похожая на предыдущую: идет разбор областей для модуля по решению на них задач с параметром и затем объединение результатов воедино.

Решение: Рассмотрим три области для изменения *x:*



I. $x \ge 2$. Тогда получим уравнение $x(a +1) = 2(a +1)$ и: $a = -1, x \ge 2$ (с учетом ОДЗ), при остальных a $x = 2$;
II. $-1 \le x \le 2$. Уравнение в этой области имеет вид $x(1 – a) = 2(1 – a)$ и при $a = 1$ $x \in [-1,2]$, а при $a \ne 1$, $x = 2$ и этот корень не принадлежит области, т.е. $a \ne 1 \Rightarrow$ нет решений (по области!);

III. $x < -1$. Тогда уравнение имеет вид $-x(a+1) = -2a + 4$ и если $a=-1$ – то нет решении, $a \neq -1$ $x = \dfrac{2a-4}{a+1}$ и требуем, чтобы $\dfrac{2a-4}{a+1} < -1$ или $3(a-1)(a+1) < 0$ или $-1 < a < 1$ т.е. – нет решений, $-1 < a < 1 \Rightarrow x = \dfrac{2a-4}{a+1}$, при a остальных $\Rightarrow$ нет решении.

Теперь соберем все ответы вместе по параметру a:

$a < -1 \Rightarrow x = 2; a = -1 \Rightarrow x \geq 2; a \in (-1{,}1)$ $x_1 = 2, x_2 = \dfrac{2a-4}{a+1}$; $a = 1 \Rightarrow x \in [-1{,}2]$; $a > 1 \Rightarrow x = 2$ – это и есть ответ.

Задача 21. Найти все a такие, что неравенство $x^2 + 2|x-a| \geq a^2$ верно для всех x.

Комментарий. Введем в рассмотрение функцию

$$Sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ \text{не определена} & x = 0 \end{cases}$$

Сделаем одно, может быть полезное, замечание: $|x|' = Sgn(x)$. Также, $|x| = xSgn(x)$ при $x \neq 0$, а иначе $|x| = 0$ при $x = 0$.

Решение:

$$x^2 - a^2 + 2|x-a| = x^2 - a^2 + 2(x-a)Sgn(x-a) =$$
$$(x-a)(x+a) + 2(x-a)Sgn(x-a) =$$
$$(x-a)[x + a + 2Sgn(x-a)] > 0$$

и это верно при $x \neq a$. При $x = a$ имеем $x^2 \geq a^2$, что, конечно, верно.

1. $x > a$. Тогда $x + a + 2Sgn(x - a) \geq 0$ или $x + a + 2 \geq 0$ или $x \geq -a - 2$. Если $x \geq -a - 2$ при всех $x > a$, то должно быть (почему?!) $a \geq -a - 2$ или $a \geq -1$.

2. $x < a$ и тогда $x + a - 2 < 0$ или $x \leq -a + 2$ и если последнее верно при всех $x < a$, то $a \leq -a + 2$ или $2a < 2$ или $a \leq 1$. Если теперь x произвольное число, то наше исходное неравенство будет истинно при $-1 \leq a \leq 1$ (случай $x = a$ был, конечно, разобран отдельно).

Задача 22. Найти все a такие, что система $\begin{cases} 1-\sqrt{|x-1|} = \sqrt{7|y|} \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases}$ имеет ровно 4 решения.

Комментарий. Смотри решение задачи 10.

Решение: Если $x \neq 1$ и $7y \neq 0$ и $\langle x-1, 7y\rangle$ – решение системы, то пары $\langle -x+1, 7y\rangle$, $\langle -x+1, -7y\rangle$, и симметричные к ним пары $\langle y, x-1\rangle$, $\langle -y, x-1\rangle$, $\langle y, -x+1\rangle$, $\langle -y, -x+1\rangle$ являются решениями системы. Уменьшить количество решений можно двумя способами: положить $x = 1$ (тогда $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ из первого уравнения; при этом систему лучше переписать в виде $\sqrt{|x-1|} + \sqrt{7|y|} = 1$ и $(7|y|)^2 + |x-1|^2 = -4a$) и из второго уравнения имеем $1 = -4a$ и $a = \dfrac{1}{4}$. Аналогичное a получается, если $y = 0$ и $|x - 1| = 1$. Но есть еще способ уменьшить количество решений, положив $x - 1 = \pm 7y$ или $|x - 1| = |7y|$ или $\sqrt{|x-1|} + \sqrt{7|y|}$; тогда $\sqrt{|x-1|} + \sqrt{7|y|} = \dfrac{1}{2}$ и $|x-1|^2 = 49y^2 = \dfrac{1}{16}$; из второго уравнения получим, что $\dfrac{1}{8} = -4a$ или $a = -\dfrac{1}{32}$.

Ответ: $a = -\dfrac{1}{32}$ или $a = -\dfrac{1}{4}$.

Задача 23. Для всех a решить уравнение $\log_{\sqrt{x}} a\cdot\log_{a^2}\left(\dfrac{a^2-4}{2a-x}\right)=1$.

Решение: Преобразуем левую часть и решим уравнение, а затем займемся областью допустимых значений (ОДЗ):

$$\log_{\sqrt{x}} a\cdot\log_{a^2}\left(\frac{a^2-4}{2a-x}\right)=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a^2-4}{2a-x}\right)}{\log_a\sqrt{x}}=$$

$$\frac{1}{2}\log_{\sqrt{x}}\frac{a^2-4}{2a-x}=1$$

или $\log_{\sqrt{x}}\left(\dfrac{a^2-4}{2a-x}\right)=1$ или $\dfrac{a^2-4}{2a-x}=x$ или $a^2-4=-x^2+2ax$ или $(x-a)^2=4$ или $x=a\pm 2$.

Теперь опишем ОДЗ (не полностью) для a и для x и затем полученные кандидаты в решения проверим в уравнении и получим окончательный ответ.

Итак, ОДЗ для a: $a > 0$, $a \neq 2$, $a \neq \pm 2$ (еще раз подчеркиваем, что это не полное ОДЗ!). Итог: $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq \pm 2$. ОДЗ для x: $x > 0$, $x \neq 1$ (снова: это не полное ОДЗ для x). Рассмотрим области для a:

$0 < a < 1$. Тогда $a + 2 > 0$ и $a + 2 \neq 1$; $a - 2 < 0$, т.е. $x = a + 2$

$1 < a < 2$. Тогда $a + 2 > 0$ и $a + 2 \neq 1$; $a - 2 < 0$, т.е. $x = a + 2$

$2 < a < 3$. Тогда $a + 2 > 0$ и $a + 2 \neq 1$; $a - 2 < 0$ и $a - 2 \neq 1$, т.е. $x = a \pm 2$

$a = 3$. Тогда $a + 2 > 0$ и $a + 2 \neq 1$; но $a - 2 = 1$, т.е. $x = a + 2$

$a > 3$. Тогда (проверьте) $x = a \pm 2$.

Теперь проверим, будет ли при данных a и x $\dfrac{a^2-4}{2a-x}>0$. В первом случае ($0 < a < 1$) числитель отрицателен и ($x = a + 2$) знаменатель отрицателен. Во втором случае ($1 < a < 2$) числитель так же отрицателен и знаменатель отрицателен. Если $2 < a < 3$, то числитель и знаменатель положительны. Если $a = 3$, то $x = 5$ и под вторым логарифмом положительное число. Если же $a > 0$, то $\dfrac{a^2-4}{2a-x}>0$ будет.

Ответ: $0 < a < 1$, $1 < a < 2$ или $a = 3$, то $x = a + 2$, $2 < a$ и $a \neq 3$, то $x = a \pm 2$. При остальных a решений нет.

Задача 24. При всех a решить уравнение

$$\sqrt{\log_a\sqrt[4]{ax}+\log_x\sqrt[4]{ax}}+\sqrt{\log_a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\log_x\sqrt[4]{\frac{a}{x}}}=a.$$

Комментарий (и к предыдущей задаче также). Решить при всех a уравнение (неравенство) означает, что нужно дать полное описание при каких a какие решения будут. При этом для уравнения возможно сначала проделать необходимые выкладки и получить решение, а затем исследовать ОДЗ и дать окончательный ответ.

Решение: Преобразуем левую часть: $\log_a\sqrt[4]{ax}=\dfrac{1}{4}\log_a$; $ax=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\log_a x$; $\log_a\sqrt[4]{ax}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\log_x a$ и под корнем получаем

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(\log_a x+\frac{1}{\log_a x}\right)}.$$

Второй корень преобразуем аналогично:

$$\sqrt{\frac{1}{4}\left(\log_a x+\frac{1}{\log_a x}\right)-\frac{1}{2}}.$$

Т.к. $a > 0$, $a \neq 1$ и $x > 0$, $x \neq 1$ и т.к. выражение под вторым радикалом должно быть неотрицательным, то $\log_a x$ должен быть положительным (при $z \geq 0$ $z + \frac{1}{2} \geq 2$ и $\frac{1}{4} \cdot 2 - \frac{1}{2} \geq 0$; если $\log_a x >$ 0, то под вторым радикалом будет отрицательное число). Но тогда выражение под первым радикалом будет больше или равно 1 и, следовательно, $a > 1$, а при $a < 1$ решений нет. Обозначим через $z = \log_a x + \frac{1}{\log_a x}$ и получим $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{z}{4}} + \sqrt{\frac{z}{4} - \frac{1}{2}} = a$. Возводим обе части в квадрат:

$$\frac{1}{2} + \frac{z}{4} + \frac{z}{4} - \frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{z}{4}}\sqrt{\frac{z}{4} - \frac{1}{2}} = a^2;$$

$$\frac{z}{2} + 2\sqrt{\frac{z^2}{16} - \frac{1}{4}} = \frac{z}{2} + \frac{\sqrt{z^2 - 2}}{2} = a^2 \text{ или } z + \sqrt{z^2 - 4} = 2a^2$$

$$\text{или } \sqrt{z^2 - 4} = 2a^2 - z.$$

Обе части снова возведем в квадрат: $z^2 - 4 = 4a^2 - 4a^2 z + z^2 z$

или $a^4 - a^2 z + 1 = 0$; $z = \frac{a^4 + 1}{a^2} = a^2 + \frac{1}{a^2}$.

Итак $\log_a x + \frac{1}{\log_a x} = a^2 + \frac{1}{a^2}$.

Нетрудно доказать теперь, что $\log_a x = a^2$ или $\log_a x = \frac{1}{a^2}$ (докажите сами, что других решений нет!!!).

Теперь, если $\log_a x = a^2$, то $x = a^{a^2}$, а если $\log_a x = \frac{1}{a^2}$, то $x = a^{\frac{1}{a^2}}$. Теперь мы проверим оба решения (оставляем эту нетрудную процедуру читателю, а также объяснение, зачем нужна проверка!).

Ответ: $a < 1$ – решений нет; $a > 1$, то $x = a^{a^2}$ и $x = a^{\frac{1}{a^2}}$.

Задача 25. Найти такие значения a, при которых наибольшее значение функции $g(x) = 3ax^2 - 2ax - 8$ равно наименьшему значению функции $f(x) = 3x^2 - 2ax - 4$.

Решение: Обе функции параболы и у $f(x)$ ветви при всех a направлены вверх, а у $g(x)$ ветви будут направлены вниз при $a < 0$. Теперь воспользуемся производными: $g'(x) = 6ax - 2a = 0$ $x = \frac{1}{3}$ (при любом a!) и

$$g_{\max} = g\left(\frac{1}{3}\right) = 3a\frac{1}{9} - 2a\frac{1}{3} - 8 = \frac{a}{3} - \frac{2a}{3} - 8 = -\frac{a}{3} - 8.$$

$$f'(x) = 6x - 2a = 0 \quad x = \frac{a}{3}$$

$$f_{\min} = 3\frac{a^2}{9} - 2a\frac{a}{3} - 4 = \frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} - 4 = -\frac{a^2}{3} - 4$$

Приравниваем $f_{\min} = g_{\max}$ или $\frac{a}{3} + 8 = \frac{a^2}{3} + 4$. $\frac{a^2}{3} - \frac{a}{3} - 4 = 0$ или $a^2 - a - 12 = 0$, т.е. $a = 4$ или $a = -3$. Т.к. $a < 0$, то $a = -3$.

Ответ: $a = -3$.

Комментарий. Решите эту задачу без использования производной.

Задача 26. Найти те значения a, при которых модуль разности корней уравнения $(\sin^2 a)x^2 + x - 1 = 0$ равняется $\sqrt{5}$.

Решение: Уравнение имеет вид $x^2 + \dfrac{1}{\sin^2 a}x - \dfrac{1}{\sin^2 a} = 0$. Конечно, $\sin^2 a \neq 0$, иначе условие задачи теряет смысл.

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2\sin^2 a} \pm \sqrt{\frac{1}{4\sin^4 a} + \frac{1}{\sin^2 a}} = \frac{-1 \pm \sqrt{4\sin^2 a + 1}}{2\sin^2 a}.$$

$$|x_1 - x_2| = x_1 - x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{4\sin^2 a + 1} + 1 + \sqrt{4\sin^2 a + 1}}{2\sin^2 a} =$$

$$= \frac{\sqrt{4\sin^2 a + 1}}{2\sin^2 a} = \sqrt{5}.$$

или $4\sin^2 a + 1 = 5\sin^4 a$ или $5\sin^4 a - 4\sin^2 a - 1 = 0$.
Если $z = \sin^2 a$, то получаем $5z^2 - 4z - 1 = 0$ или

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+5}}{5} = \frac{2 \pm 3}{5};$$

т.к. $z > 0$, то $z = 1$ или $\sin^2 a = 1$ или $\sin a = \pm 1$.

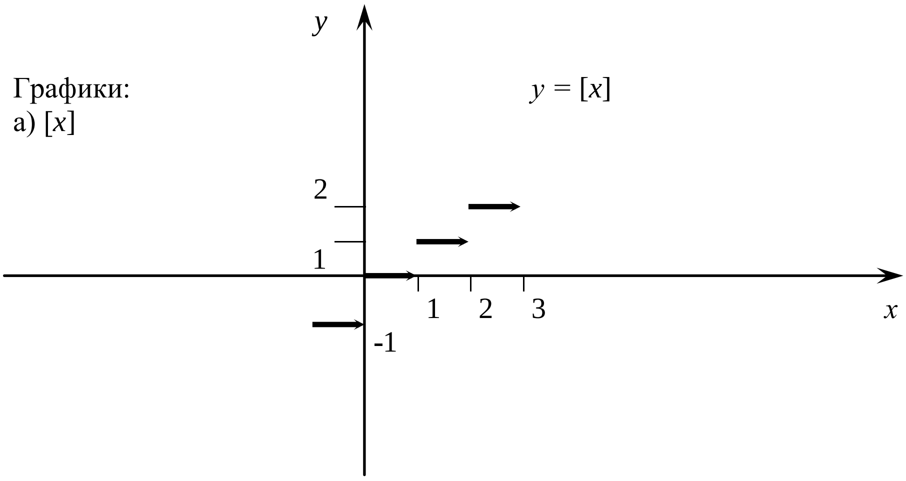
Тогда $a = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ или $a = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ и, объединяя обе серии, $a = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, где k – целое.

Ответ: $a = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in z$.

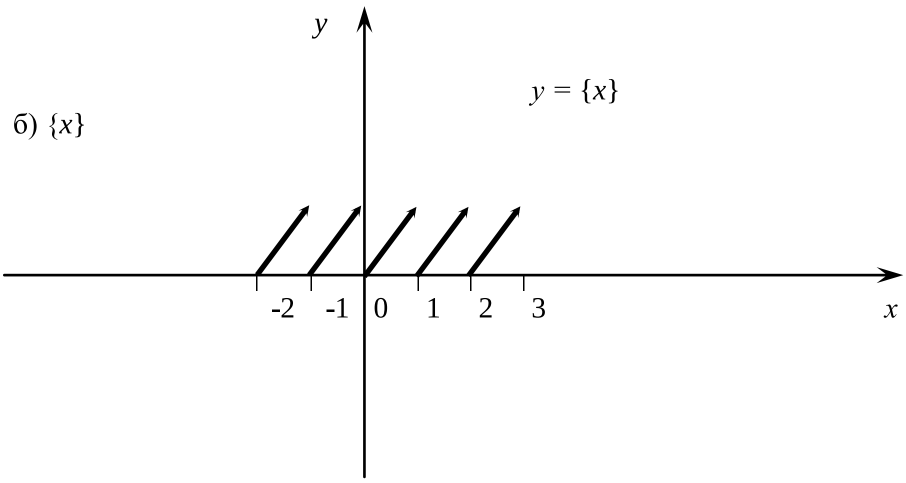
Задача 27. При всех a решить уравнение $[\sin^2 3x] = 3 - 2ax$, где [*в*] означает целую часть числа *в*.

Комментарий. Целая часть числа $[a]$ есть наибольшее целое $m<a$. Например, $[\pi] = 3$, $[-1{,}5] = -2$ и т.д. Разность $a - [a]$ (a всегда $>[a]$) есть дробная часть числа a и обозначается $\{a\}$. Таким образом $a = [a] + \{a\}$ $0 \geq \{a\} < 1$ всегда.

Графики:
а) $[x]$



б) $\{x\}$



Решение: Если a = 0, то решений, очевидно, нет. Пусть $0 < \sin^2 3x < 1$ или $\sin^2 3x \neq 1$, т.е. $\sin 3x \neq \pm 1$; $3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi(1+2k)}{2}$ и $x \neq \frac{\pi(1+2k)}{6}$. Тогда $3 - 2ax = 0$ и $a = \frac{3}{2x}$ и $x = \frac{3}{2a} \neq \frac{\pi(1+2k)}{6}$ или $a \neq \frac{9}{\pi(1+2k)}$ (если $a = \frac{9}{\pi(1+2k)}$, то левая часть = 1, а правая часть = 0). Итак, если $a \neq 0$ и $a \neq \frac{9}{\pi(1+2k)}$, то есть решение $x = \frac{3}{2a}$; (a = 0 или $a = \frac{9}{\pi(1+2k)}$, то решений нет!).

Если же $\sin^2 3x = 1$, то $x = \frac{\pi(1+2k)}{6}$ и $a = \frac{1}{x}$, т.е. при $a = \frac{6}{\pi(1+2k)}$ есть еще решение $x = \frac{1}{a}$.

Ответ: если $a = \frac{6}{\pi(1+2k)}$, то $x_1 = \frac{1}{a}$ и $x_2 = \frac{3}{2a}$; если $a \neq 0$, $a \neq \frac{9}{\pi(1+2k)}$ и $a \neq \frac{6}{\pi(1+2k)}$, то $x = \frac{3}{2a}$; если a = 0 или $a = \frac{9}{\pi(1+2k)}$, то нет решений (здесь k – целое число).

Задача 28. Определить такие $a \geq 2$, что система $\left.\begin{array}{l} \sin x \cos y = a^3 - a^2 - 6a + \frac{35}{4} \\ \cos x \sin y = a^2 - 6a + \frac{33}{4} \end{array}\right\}$ имеет решение.

Решение: Если мы сложим левые и правые части, то слева возникнет $\sin(x + y)$, который имеет ограничения и, следовательно, $-1 \leq a^3 - 12a + 17 \leq 1$; если же мы вычтем левые и правые части, то слева возникнет $\sin(x - y)$, имеющий такие же ограничения и, следовательно, $-1 \leq a^3 - 2a^2 + \frac{1}{2} \leq 1$. Решим самое первое из неравенств (их всего четыре) $a^3 - 12a + 16 \leq 0$. Нетрудно видеть, что соответствующее уравнение имеет корень $a = 2$ $a^3 - 12a + 16 = (a - 2)(a^2 + 2a - 8) = (a - 2)^2(a + 4)$, т.е. неравенство решается так: $a = 2$ или $a \leq -4$ (решите неравенство методом интервалов). Т.к. $a \geq 2$, то $a = 2$ –единственное число, но нужно проверить, является ли а = 2 корнем трех остальных неравенств (проверьте, что это так!).

Ответ: a = 2.

Комментарий. Найдите решение системы при a = 2.

Задача 29. Найти все a такие, что система $\begin{cases} ax^2 + a - 1 = y - |\sin x| \\ \mathrm{tg}^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение: Если пара <x,y> решение системы, то и пара <$-x,y$> такова же (относительно y такое замечание неверно!). Итак, x = 0. Но тогда $y = \pm 1$ и, подставляя в верхнее уравнение, находим $a - 1 = 1$ и a = 2 или $a - 1 = -1$ и a = 0. Однако a = 0 не удовлетворяет нашему условию (можно подставить a = 0 в систему и убедиться, что решений будет много; но попробуйте доказать это, не делая никаких преобразований и вычислений).

Ответ: a = 2.

Комментарий. Найдите все решения (т.е. одно!) системы, при a = 2 (снова, саму систему решать не нужно!).

Задача 30. При каких a неравенство $(a^2 - 6a + 8)(x - 1 - 4) \leq 2 - a$ имеет единственное решение. Найти это решение.

Решение: Заметим, что выражение $a^2 - 6a + 8 = (a-2)(a-4)$. Разобьем решение на четыре случая:

1) $a = 2$, тогда $0 \cdot (|x-1|-4) = 0$ и решений бесконечно много;

2) $a = 4$, тогда $0 \cdot (|x-1|-4) \le -2$ и решений нет;

3) $(a-2)(a-4) < 0$ и после деления обеих частей на отрицательное число получим:

$$|x-1|-4 \ge \frac{2-a}{(a-2)(a-4)} = \frac{1}{4-a}$$

или $|x-1|-4+\frac{1}{a-4} \ge 0$ и в этом случае, чтобы было ровно одно решение, необходимо и достаточно, чтобы $4-\frac{1}{a-4}=0$ или $4a - 16 - 1 = 0$ или $a = \frac{17}{4}$ ($x = 1$ в этом случае; докажите этот факт единственности самостоятельно); но $a =$ — не находится в области ограничений).

4. $a < 2$ или $a > 4$; снова делим на $(a-2)(a-4)$, которое положительно и имеем $|x-1|-4 \ge \frac{2-a}{(a-2)(a-4)} = \frac{1}{4-a}$; в этом случае $|x-1| \le 4+\frac{1}{a-4} = \frac{4a-17}{a-4}$ и единственное решение даст $a = \frac{17}{4}$, которое еще удовлетворяет ограничениям.

Ответ: $a = \frac{17}{4}$ и $x = 1$.

Задача 31. При каких a уравнение $\frac{4}{x^2+1}+x^2=a$ имеет ровно два решения. Найдите эти решения.

Решение: Полагаем $x^2 + 1 = y$ и ясно, что $y \ge 1$; если же $y = 1$, то $x = 0$, и число корней уравнения не может быть четным. Итак, $y > 1$. Уравнение имеет вид $\frac{4}{y} + y = a + 1$ или $y^2 - (a + 1)y + 4 = 0$(*). Исходное уравнение имеет точно два различных решения, если:

а) уравнение (*) имеет единственный корень, больший 1;

б) уравнение (*) имеет два различных корня, из которых больший – больше 1, а меньший – меньше 1.

в) имеет место при $Д = 0 = (a + 1)^2 - 16 = 0$ или $a = -5$, $a = 3$; при $a = -5$ уравнение (*) имеет вид $y^2 + 4y + 4 = 0$ и $y = -2$, что не удовлетворяет условию $y > 1$; при $a = 3$ уравнение (*) таково: $y^2 - 4y + 4$ и $y = 2 > 1$ – единственный корень, т.е. $x \pm 1$ в этом случае.

Если $f(y) - y^2 - (a + 1)y + 4$, то $f(1) < 0$ является необходимым и достаточным условием реализации случая б) (тогда наша парабола, у которой ветви направлены вверх, пересечет ось Oy по разные стороны от точки $y = 1$!). Но $f(1) < 0 \Leftrightarrow a > 4$ (проделайте это сами и сами вычислите в этом случае больший корень $y = \frac{a+1+\sqrt{a^2+2a-15}}{2}$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a+1+\sqrt{a^2+2a-15}}{2}}$)

Ответ: $a = 3$, $x = \pm1$; $a > 4$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a+1+\sqrt{a^2+2a-15}}{2}}$.

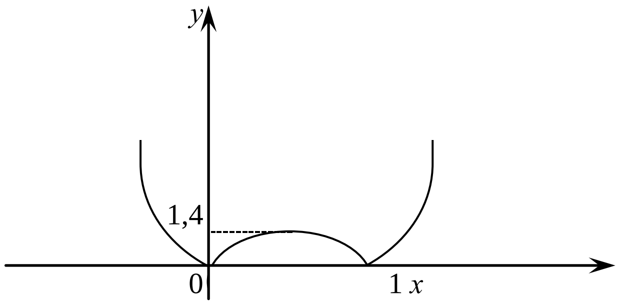
Задача 32. Для всех a определить наибольшее значение $y = 1 + 2ax - 3x^2$ на отрезке [2,5].

Решение: График функции $y = -3x^2 + 2ax + 1$ – парабола с ветвями, направленными вниз. Ответ задачи зависит от расположения абсциссы $x_0 = \frac{a}{3}$ вершины параболы относительно отрезка [2,5]. Если $\frac{a}{3} \le 2$, то отрезку «соответствует» дуга нисходящей ветви и $y_{\max} = y(2)$. Если $2 < \frac{a}{3} < 5$, то наибольшего значения функция достигает в т. $\frac{a}{3}$ (точка локального и глобального экстремума $y = -3x^2 + 2ax + 1$). Если же $\frac{a}{3} \ge 5$, то отрезку [2,5] «соответствует» дуга восходящей параболы и $y_{\max} = y(5)$. Итак если $a \le 6$, то $y_{\max} = y(2) = 4a - 11$; если $6 < a < 15$, то $y_{\max} = y\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{a^2}{3} + 1$; если $a \le 15$, то $y_{\max} = y(5) = 10a - 74$.

Ответ: $a \le 6$, $y_{\max} = 4a - 11$; $6 < a < 15$, $y_{\max} = \frac{a^2}{3} + 1$; $a \le 15$, $y_{\max} = 10a - 74$.

Задача 33. Сколько решений при различных a имеет уравнение 1) $\left|x - x^2\right| = a$; 2) $\left|ax^2 - 1\right| = 1$.

Решение: 1) Построим график функции, стоящей в левой части равенства: $x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = 1$. Отсюда заключаем, что при $a < 0$ решений нет; при $a = 0$ или $a > \frac{1}{4}$ есть ровно два решения; при $0 < a < \frac{1}{4}$ – четыре решения и при $a = \frac{1}{4}$ – три решения.



Ответ: нет решений, если $a < 0$; два решения при $a = 0$, $a > \frac{1}{4}$; три решения при $a = \frac{1}{4}$; четыре решения при $0 < a < \frac{1}{4}$.

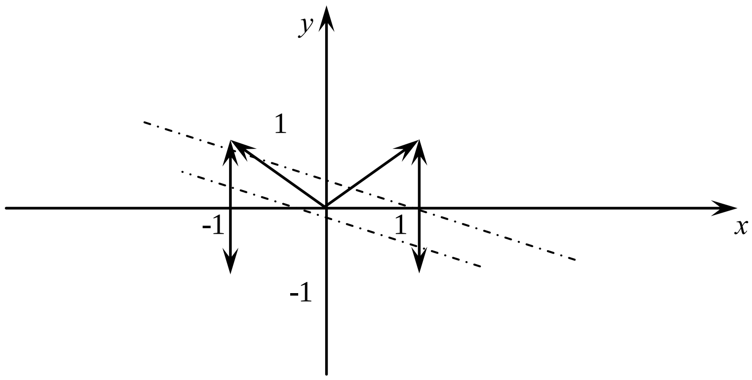
2) $\left| ax^2 - 1 \right| = 1$. Если $a = 0$, то любое x служит решением. Если $a < 0$, то число под модулем меньше или равно –1 и корень единственный: $x = 0$. Если $a > 0$, то, во-первых, $x = 0$ является корнем и, во-вторых, $ax^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow ax^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{a}}$ – корни уравнения. Итого: три корня.

Ответ: $a < 0$ – один корень; $a > 0$ – три корня; $a = 0$ –бесконечно много корней.

Комментарий. Постройте график функции $\left| ax^2 - 1 \right|$ при различных a и решите задачу графически.

Задача 34. При каких a система $\begin{cases} \dfrac{(x^2 - 1)(y - |x|)}{\sqrt{1 - y^2}} = 0 \\ x + 2y = a \end{cases}$ имеет ровно четыре решения.

Решение: Построим множество точек, удовлетворяющих первому уравнению: $|y| < 1; |x| = 1$ или $y = |x|, |y| < 1$. Зададим какое-нибудь значение a (например, $a = 0$) и проведем пунктиром прямую
$x + 2y = 0$.

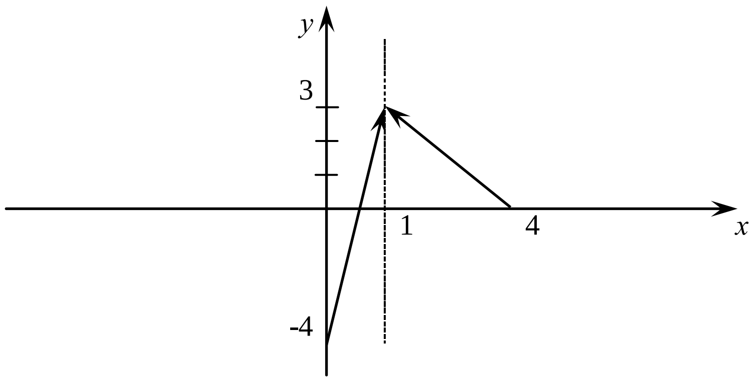


Будем теперь двигать эту прямую параллельно самой себе и смотреть, при каких a будет ровно четыре точки пересечения с множеством точек, удовлетворяющих первому уравнению. Если $a < 0$, то таких точек будет 2 или 1 или вообще ни одной; при $a = 0$ их три; если $0 < a < 1$, то наша прямая $x + 2y = a$ пересечет ровно четыре точки нашего множества. И затем ($a > 1$) количество точек будет меньше четырех.

Ответ: $0 < a < 1$.

Задача 35. При каких a функция $y = f(x)$ имеет максимум в точке $x = 1$, если $y = \begin{cases} 7x-4 & x<1 \\ a & x=1. \\ 4-x & x>1 \end{cases}$

Решение: Построим график нашей функции:



Если $a > 3$, то наша функция имеет максимум в точке $x = 1$ и $y_{\max} = a$ $= a$. Если же $a < 3$, то максимум в точке $x = 1$ не достигается. Решение усматривается непосредственно из графика y.

Ответ: при $a \geq 3$.

Задача 36. Определить все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x-1} = ax + 4a - 2$ имеет единственное решение.

Решение: Сделаем замену переменной $\sqrt{x-1} = z \geq 0$ $\sqrt{x-1} = a(x-1) + 5a - 2$ и получим $z = az^2 + 5a - 2$.

$az^2 z + 5a - 2 = 0$ или $z^2 - \frac{1}{a}z + \left(5 - \frac{2}{a}\right) = 0$ ($a \neq 0$, т.к. иначе $\sqrt{x-1} = -2$ не имеет решений).

$z_{1,2}=\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{1}{4a^2}-5+\frac{2}{a}}=\frac{1}{2a}\pm\frac{\sqrt{1-20a^2+8a}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{1+8a-20a^2}}{2a}$ ОДЗ существования корней: 1 + 8a – $20a^2$ > 0 или $20a^2-8a-1\le 0$ или $a_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{36}}{20}=\frac{4\pm 6}{20}$; $a=\frac{1}{2}$ и $a=-\frac{2}{5}$, т.е. ОДЗ такова: $-\frac{2}{5}\le a\le\frac{1}{2}$. Т.к. z > 0, то необходимо выполнение системы $\begin{cases} z_1\ge 0 \\ z_2<0 \end{cases}$ или

$$\begin{cases} \frac{1+\sqrt{1+8a-20a^2}}{2a}\ge 0 \\ \frac{1-\sqrt{1+8a-20a^2}}{2a}\le 0 \end{cases}.$$

Т.к. $1+\sqrt{1+8a-20a^2}$ > 0, то a > 0 должно быть. Т.к. a > 0, то $1-\sqrt{1+8a-20a^2}$ < 0 или $1<\sqrt{1+8a-20a^2}$ или $8a-20a^2$ > 0 или $a(5a-2)<0$, т.е. $0<a<\frac{2}{5}$.

Итак, $0<a<\frac{2}{5}$; но при $a>0$ есть еще $a=\frac{1}{2}$ (с корнем $z=1$ или $x=2$).

Ответ: $0<a<\frac{2}{5}$ или $a=\frac{1}{2}$.

Задача 37. Найти все значения *x,* для каждого из которых равенство $x^2+|x-a|-4=0$ выполняется хотя бы при одном значении *a* из отрезка [-4,2].

Решение: Перепишем уравнение $|x-a|=4-x^2$ и сразу увидим, что $-2\le x\le 2$.

На этом отрезке [-2,2] уравнение исходное равносильно совокупности двух уравнений $x-a=4-x^2$, $x-a=x^2-4$. Найдем те $x\in$ [-2,2], каждое из которых является решением уравнения $x-a=4-x^2$, где $a\in[-4{,}2]$. Т.к. уравнение можно записать в виде $x^2+x-4=a$, то искомые значения удовлетворяют системе $\begin{cases} -2\le x\le 2 \\ -4\le x^2+x-4\le 2 \end{cases}$. Решением этой системы служат два отрезка $-2\le x\le -1$ или $0\le x\le 2$ (проведите решение системы выше самостоятельно!)

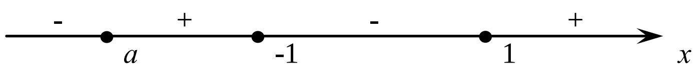
Теперь рассмотрим второе уравнение $x-a=x^2-4$ на интервале $0<x<1$ и запишем его так $a=x(1-x)+4$. Для всякого $x\in(0{,}1)$ выполнено неравенство $x(1-x)+4>4$. Поэтому при $a\in[-4{,}2]$ уравнение $x-a=x^2-4$ на (0,1) решений не имеет. Окончательно получаем, что искомое множество значений удовлетворяет неравенствам $-2\le x\le -1$ или $0\le x\le 2$.

Ответ: $-2\le x\le -1$ или $0\le x\le 2$.

Задача 38. Для каждого значения параметра *a* решить неравенство $(x^2-1)(x-a)\ge 0$.

Решение: Применим метод интервалов. Т.к. $(x^2-1)(x-a)=0$ только тогда, когда $x=1$, $x=-1$ или $x=a$, то рассмотрим интервалы для *a* такие:

1) $a<-1$ и в этом случае $x\le a, -1\le x\le 1$



2) $a=-1$, тогда неравенство имеет вид $(x+1)^2(x-1)\le 0$ или $x\le 1$;

3) $-1<a<1$, делаем по аналогии с 1) (проделайте это самостоятельно!) и получаем $x\le -1, a\le x<1$;

4) $a=1$, неравенство примет вид $(x-1)^2(x+1)$, откуда $x\le -1, x=1$;

5) $a>1$, снова, аналогично 1) получаем $x\le -1, 1\le x<a$ (и эти вычисления сделайте самостоятельно).

Ответ: $a<-1: x\le a$ или $-1\le x<1; a=-1: x\le 1;$ $-1<a<1: x\le -1$ или $a\le x<1; a=1: x\le -1$ или x = 1; a > 1: $x\le -1$ или $1\le x\le a$.

Задача 39. Найти все значения параметра *a,* при которых неравенство $\dfrac{3x+a}{4x-a+1}$ < 0 выполняется на отрезке [2,4].

Решение: Приведем неравенство к виду $(3x + a)(4x - a + 1) < 0$ или $\left(x+\dfrac{a}{3}\right)\left(x-\dfrac{a-1}{4}\right)$< 0 и, решая методом интервалов, получим:

1) $-\dfrac{a}{3}<\dfrac{a-1}{4}$ что эквивалентно $a>\dfrac{3}{7}$ и $-\dfrac{a}{3}<x<\dfrac{a-1}{4}$. Тогда $-\dfrac{a}{3}<2$ и $\dfrac{a-1}{4}>4$ или a > –6 и a > 17 и, с учетом всех ограничений, a > 17;

2) $\dfrac{a-1}{4}<-\dfrac{a}{3}$, что эквивалентно $a<\dfrac{3}{7}$ и $\dfrac{a-1}{4}<x<-\dfrac{a}{3}$ или $\dfrac{a-1}{4}<2$ и $-\dfrac{a}{3}>4$ или a < 9 и a < –12 и, с учетом всех ограничений, a < –12.

Ответ: a < –12 или a > 17.

Задача 40. Найти те значения параметра k, при которых неравенство $k^2 + 2k - \sin^2 x - 2k\cos x > 2$ выполняется для всех x.

Решение: Преобразуем левую часть неравенства к виду $(1-\cos x)^2 + 2k(1 - \cos x) - 2(1 - \cos x) + k^2 - 2 > 0$ (проверьте, что это так!) и сделайте замену $z=1-\cos x$. Тогда $2\ge z\ge 0$ для всех x. Неравенство примет вид $z^2 + 2kz - 2z + k^2 - 2 > 0$ или $z^2+z(2k-2)+k^2-2>0$. Чтобы это неравенство выполнялось при всех x необходимо и достаточно, чтобы $Д(k)$ < 0 или, если $Д(к) \ge 0$, чтобы $z_1(k)<0$ или $z_1(k)>2$ было выполнено, где z_1– больший и z_2 – меньший корни квадратного уравнения.

$$z_{1,2}(k)=(1-k)\pm\sqrt{1-2k+k^2-k^2+2}=(1-k)\pm\sqrt{3-2k}\,.$$

Итак, если 3 – 2/с < 0 или $k>\dfrac{3}{2}$, то такие значения k удовлетворяют условию задачи. Если же $k\le\dfrac{3}{2}$, то решаем систему $\left[\begin{array}{l}1-k+\sqrt{3-2k}<0\\ 1-k-\sqrt{3-2k}>2\end{array}\right.$ или $\sqrt{3-2k}<k-1$ или $1-k>\sqrt{3-2k}$ (конечно, не забываем, что $k\le\dfrac{3}{2}$!). Для первого неравенства k > 1, и на этой области возводим обе части в квадрат: $3 - 2k < k^2 - 2k + 1$ или $k^2 > 2$ или $|k|>\sqrt{2}$. С учетом ограничений выше получаем $k>\sqrt{2}$. Для второго неравенства $k<-1$ и на этой области возводим обе части неравенства в квадрат $3 - 2k < k^2 + 2k + 1$ или $k^2 + 4k - 2 > 0$ и $k > -2 + \sqrt{6}$ или $k < -2 - \sqrt{6}$. Т.к. $-2 + \sqrt{6} < \sqrt{2}$, то справа новых k не возникнет. Т.к. $-2 - \sqrt{6} < -1$, то левая часть будет $k < -2 - \sqrt{6}$.

Ответ: $k < -2 - \sqrt{6}$ или $k > \sqrt{2}$.

В заключение мы приведем ряд нестандартных задач, не относящихся к разделу «Задачи с параметрами». Их решения, возможно, окажутся полезными для будущего абитуриента.

Задача 41. Решить систему уравнений $\begin{cases}x+y+z=2\\ xy+xz+yz+-1\\ xyz=-2\end{cases}$.

Комментарий. Теорема Виета для уравнения второй степени утверждает, что $x_1+x_2 = -p$ и $x_1x_2 = q$, где x_1 и x_2 – корни приведенного уравнения $x^2 + px + q = 0$. Для уравнения третьей степени соотношения будут такие: $x_1 + x_2 + x_3 = -p$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q$ и $x_1x_2x_3 = -r$, где x_1, x_2 и x_3 – корни приведенного уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

Решение: Используя комментарий, выпишем кубическое уравнение для определения x, y и z: $a - 2a - a + 2 = 0$. Разложим на множители левую часть: $a(a^2 - 1) - 2[a^2 - 1) = (a - 2)(a - 1)(a + 1)=0$. Корни уравнения 1, 2, –1; следовательно, решением уравнения будут упорядоченные тройки <1,2,-1>, <1,-1,2>, <-1,1,2>, <-1,2,1>, <2,-1,1>, <2,1,-1> (т.е. любая перестановка корней исходного уравнения).

Ответ: <1,2-1>, <1,-1,2>, <-1,1,2>, <-1,2,1>, <2,-1,1>, <2,1,-1>.

Задача 42. Найти все рациональные решения системы

$$\left.\begin{aligned} x^2 + xy + 2y^2 - 2x - y = 3 \\ -5x^2 + 3xy + 4y^2 + 10x - 3y = 7 \end{aligned}\right\}.$$

Комментарий. Рациональным числом называется число, имеющее вид $\frac{m}{n}$, где числитель и знаменатель дроби – целые числа.

Решение: Умножим первое уравнение на 5 и сложим со вторым. Получим $8xy + 14y^2 - 8y = 22$ и выразим x через y: $x = \frac{11}{4y} + 1 - \frac{7y}{4}$. Подставим полученное для x выражение в первое уравнение. Имеем:

$$\left(\frac{11}{4y} + 1 - \frac{7y}{4}\right)^2 + y\left(\frac{11}{4y} + 1 - \frac{7y}{4}\right) + 2y^2 - 2\left(\frac{11}{4y} + 1 - \frac{7y}{4}\right) - y - 3 = 0$$

Преобразуем

$$\frac{121}{16y^2} + 1 - \frac{49y^2}{16} + \frac{11}{2y} - \frac{7y}{2} - \frac{77}{8} + \frac{11}{4} + y - \frac{7y^2}{4} + 2y^2 -$$

$$- \frac{11}{2y} - 2 + \frac{7y}{2} - y - 3 = 0.$$

Домножая обе части уравнения на 16 и обозначая $y^2=z$, получим квадратное уравнение $53z^2 - 174z + 121 = 0$ или $z_{1,2} = \frac{87 \pm \sqrt{7569 - 6413}}{53} = \frac{87 \pm 34}{53}$; $z_1 = 1$; $z_2 = \frac{121}{53}$; $z_{1,2} = \pm 1$ и других корней нет, т.к. $\sqrt{53}$ – иррациональное число. Тогда вычисляем $x_1 = 2$, $x_2 = 0$.

Комментарий. Если $y = 0$, то из первого уравнения получаем $x^2 - 2x - 3 = 0$ и $x = –3$ и $–1$ и пары (3,0) и (-1,0) не удовлетворяют второму уравнению. И, конечно, нужно проверить оба полученных ответа.

Ответ: (2,1) или (0,-1).

Задача 43. Найти такие x, при которых y, удовлетворяющей уравнению $4x^2 - 4xy + 2y^2 + y = 3$, будет максимальным.

Решение: Уравнение имеет вид:

$$2y^2 + y(1 - 4x) + 4x^2 - 3 = 0 \text{ и}$$

$$y_{1,2} = \frac{(4x-1) \pm \sqrt{16x^2 - 8x + 1 - 8(4x^2 - 3)}}{4} =$$

$$\frac{(4x-1) \pm \sqrt{26 - (4x+1)^2}}{4}.$$

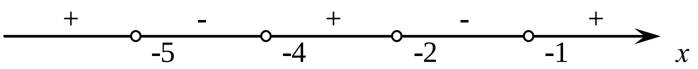
Обозначим $z = 4x + 1$ (ясно, что если z таково, что y_1 (т.к. первый коэффициент уравнения 2 > 0, т.е. $(4x - 1)+...$ будет больше y_2 и будет минимальным) максимально, то y_1 будет максимальным и при $x = \frac{z-1}{4}$). Итак, $y_1 = z - 2 + \sqrt{26 - z^2}$ и нужно достичь максимума выражения $z + \sqrt{26 - z^2}$. Возведем это выражение в квадрат (нужно помнить, что все наши преобразования должны быть эквивалентными): $z^2 + 26 - z^2 + 2z\sqrt{26 - z^2}$ и снова поищем максимум выражения zV26-z^2, которое достигается при максимуме $z\sqrt{26 - z^2}$, а последнее имеет максимум при $z^2 = 13$ (как точка вершины параболы, у которой ветви смотрят вниз), т.е. $z = \sqrt{13}$, а $x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$.

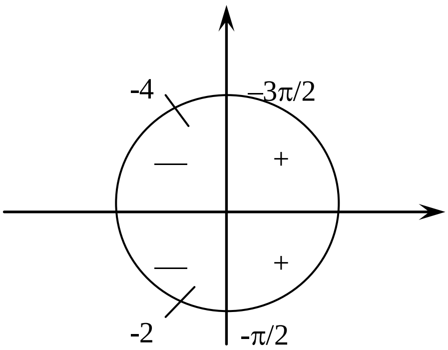
Ответ: $x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$ (никто не спрашивал, чему равно само $y_{\max}$!!).

Задача 44. Доказать, что если $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 9x + 20) < 0$, то $\cos 2x < 0$.

Комментарий. Постановка задачи может быть немного сбивает с толку, однако нужно решить левое неравенство и проверить, что при всех x из ответа $\cos 2x < 0$.

Решение: $x^2 + 3x + 2 = 0$, $x_{12} = -1, -2$; $x^2 + 9x + 20 = 0$, $x_{1,2} = -4, -5$. Методом интервалов получаем:





т.е. либо $-2 < x < -1$ или $-5 < x < -4$, а тогда $-4 < 2x < -2$ или $-10 < 2x < -8$. Удобно перейти на круг радиуса 1.

Т.к. $-2 < -\dfrac{\pi}{2}$ и т.к. $-\dfrac{3\pi}{2} < -4$ (это очевидные неравенства), то для $-4 < 2x < -2$ $\cos 2x < 0$. Т.к. $-8 < -\dfrac{5\pi}{2}$ и т.к. $-\dfrac{7\pi}{2} < -10$, то для $-10 < 2x < -8 \quad \cos 2x < 0$, что и требовалось доказать.

Задача 45. Решить уравнение $\sqrt{x+[x]} + \sqrt{x-[x]} = 1$.

Комментарий. Освежить, что есть целая часть числа, обратившись к комментарию задачи 27.

Решение: Возведем обе части в квадрат (это эквивалентное преобразование) $x+[x]+x-[x]+2\sqrt{x^2-[x]^2} = 1$ или $2\sqrt{x^2-[x]^2} = 1$ или $\dfrac{1}{2} - x = 2\sqrt{x^2-[x]^2}$ и $x \le \dfrac{1}{2}$ (справа стоит корень). Возводим обе части снова в квадрат $\dfrac{1}{4} - x + x^2 = x^2 - [x]^2$ или $[x]^2 = x - \dfrac{1}{4}$ и $x \ge \dfrac{1}{4}$. Так как $\dfrac{1}{4} \le x \le \dfrac{1}{2}$, то $[x] = 0$ и тогда $x = \dfrac{1}{4}$.

Ответ: $x = \dfrac{1}{4}$.

Задача 46. Взяли 4 листа и разрезали некоторые из них на 4[е] части. Затем среди полученных листов тоже некоторые разрезали на 4[е] части и т.д. После нескольких таких операций подсчитали количество получившихся листов и оказалось, что их 1994. Доказать, что в подсчете ошибка.

Решение: Докажем, что после каждой операции, состоящей в разрезании нескольких из имеющихся листов, число листов будет ровно $3n + 1$. Исходное число $4 = 3\cdot 1 + 1$. Если листов было $3n + 1$ и мы разрезали 1 лист на 4[е] части, то число листов стало $3n + 1 - 1 + 4 = 3n + 3 + 1 = 3(n + 1) + 1$. Т.к. $1994 = 664\cdot 3 + 2$, то в подсчете ошибка.

Задача 47. Решить уравнение $\lg([x] - 100) - \left[\dfrac{2}{\lg x}\right] = 2$.

Комментарий. Вспомнить определение целой части числа.

Решение: $\lg x \ne 0, x \ne 1$ и $x > 0$, т.е. $[x] \ge 0; [x] > 100$, т.е. $x \ge 101$, а тогда $\lg x > 2$ и $\dfrac{2}{\lg x} < 1$, т.е. $\left[\dfrac{2}{\lg x}\right] = 0$. Тогда $\lg([x] - 100) = 2$ и $[x] - 100 = 100$ и $[x] = 200$. Тогда $200 \le x < 201$.

Ответ: $200 \le x < 201$.

Задача 48. Решить уравнение $\sin^2 2x + \left[\frac{x}{\pi}\right] = \cos x$ при $0 \le x \le \pi$.

Решение:

1) $x = n$; тогда $\left[\frac{x}{\pi}\right] = 1$, $\sin^2 2\pi = 0 \Rightarrow 0 + 1 = \cos^2\pi = 1$, т.е. π – корень нашего уравнения;

2) $0 \le x \le \pi$, $x \ne \pi$; тогда $\left[\frac{x}{\pi}\right] = 0$ и уравнение имеет вид: $\sin^2 2x = 4\sin^2\cos^2 x = \cos^2 x$, $\cos^2 x = 0 \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$, $4\sin^2 x = 1$, $\sin x = \pm\frac{1}{2}, x = \frac{\pi}{6}$ или $x = \frac{5\pi}{6}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6}$ или $x = \frac{\pi}{2}$ или $x = \frac{5\pi}{6}$ или $x = \pi$.

Задача 49. Найти целые m такие, что уравнение $\frac{x-4}{m-1} = \frac{m-6}{x}$ не имеет решении.

Решение: $x \ne 0$ и $m \ne 1$ – ОДЗ. Преобразуем уравнение к виду: $x^2 - 4x = m^2 - 7m + 6$ или $x^2 - 4x - (m^2 - 7m + 6) = 0$.

Д $= 4 + m^2 - 7m + 6 = m^2 - 7m + 10 < 0$ (должен быть)

$$m_{1,2} = \frac{7}{2} \mp \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7 \pm 3}{2}; m_1 = 5 \text{ и } m_2 = 2.$$

Поэтому $m = 3$ или $m = 4$.

Ответ: $m = 3$, $m = 4$.

Задача 50. Решить уравнение:

$$\sqrt{\frac{5x^2 - 2x + 7}{3}} + 2\sqrt{\frac{4x^2 + 5x + 1}{3}} = \sqrt{14x^2 + x + 15}.$$

Решение: Преобразуем и возведем обе части два раза в квадрат (полученные решения потом проверим):

$$\sqrt{5x^2 - 2x + 7} + 2\sqrt{4x^2 + 5x + 1} = \sqrt{42x^2 + 3x + 15}$$

$$5x^2 - 2x + 7 + 16x^2 + 20x + 4 + 2\sqrt{5x^2 - 2x + 7}\sqrt{16x^2 + 20x + 4} =$$

$$= 42x^2 + 3x + 45$$

или $(21x^2 - 15x + 34)^2 = 4(5x^2 - 2x + 7)(16x^2 + 20x + 4)$ или $441x^4 - 630x^3 + 1428x^2 + 225x^2 - 1020x + 1156 = 320x^4 + 272x^3 + 368x^2 + 528x + 112$ или $121x^4 - 902x^3 + 1285x^2 - 1548x + 1044 = 0$. Теперь заметим, что $x = 1$ – корень. Делим наше выражение на $(x - 1)$ и получаем новое уравнение: $121x^3 - 781x^2 + 504x - 1044 = 0$. Снова замечаем!! (но как!), что $x = 6$ – корень последнего уравнения. Делим левую часть на (x – 6) и получаем новое уравнение: $121x^2 - 55x + 174 = 0$, которое (как теперь уже нетрудно заметить) корней не имеет. Проверяем $x = 1$ и $x = 6$. Оба являются корнями исходного уравнения (это также ясно из того, что при возведении в квадрат оба раза обе части уравнений были положительны).

Комментарий. Возможно, что это не лучшее решение, но это – решение, А вот более простое решение. Обозначим $5x^2 - 2x + 7 = a$ и $4x^2 + 5x + 1 = в$ и заметим, что $14x^2 + x + 15 = 2a + в$. Уравнение имеет вид:

$$\sqrt{\frac{a}{3}} + 2\sqrt{\frac{в}{3}} = \sqrt{2a + в}.$$

Предлагаем решить это уравнение дальше самостоятельно. И в заключение совет и замечание.

Совет: для того, чтобы научиться решать задачи, нужно решать их как можно больше.

Замечание: если вы чувствуете, что вас очень тянет к решению задач, то у вас, скорее всего, все обязательно получится.

И еще: эту книгу нужно читать обязательно с ручкой в руках.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. При каких значениях a система $\begin{cases} x + ay = -1 \\ ax + y = 2a \end{cases}$ не имеет решений.

Ответ: $a = +1$.

2. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} 2x + ay = \alpha + 2 \\ (\alpha + 1)x + 2\alpha y = 2\alpha + 4 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

Ответ: $a = 3$.

3. Числа A, B и C таковы, что система уравнений $\begin{cases} Ax - By = 2A - B \\ (C+1)x + Cy = 10 - A + 3B \end{cases}$ имеет бесконечно много решений, причем $x = 1$, $y = 3$ – одно из этих решений. Найти A, B, C.

Ответ: $A = 0$, $B = 0$, $C = \frac{9}{4}$ или $A = 2$, $B = -1$, $C = 1$.

4. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y = 3a \\ x + y = 1 \end{cases}$ не имеет решений.

Ответ: $a = -\frac{2}{3}$.

5. При каких значениях параметров див система уравнений $\begin{cases} a^2x = вy = a^2 - в \\ вx - в^2y = 2 + 4в \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

Ответ: (1,-1), (1,-2), (-1,-1), (-1,-2).

6. Найти все значения параметров a и $в$ такие, что равенство $(x + 3)^2 - x - 9 = (a + в)x^2 - \frac{19 - в}{a}$ выполнено при всех x.

Ответ: $a = -3$ и $в = 4$.

7. Найти все значения параметра a, при которых равенство $(x + 3)(a + 18) = 5(5ax + 90x + 54 + 3a)$ выполнено при всех x.

Ответ: $a = -18$.

8. При каких a неравенство $(a^2 — 6a + 5)(-x^2 +6x - 5) > a -1$ имеет единственное решение. Найдите это решение.

Ответ: $a = 25$ или $a = -5$, $x = 3$.

9. Найти такие a, что уравнение $\sin^4 x - 2\cos^2 x + a^2 - 3 = 0$ не имеет решений.

Ответ: $|a| > \sqrt{5}$ или $|a| < \sqrt{2}$.

10. Найти все a такие, что неравенство $(5a - x)(3x - 6a - 9) > 0$ выполнено при всех x из отрезка [-1,2]

Ответ: $-\frac{1}{2} < a < -\frac{1}{5}$.

11. На декартовой плоскости заданы два множества точек $\begin{cases} y \ge 10x \\ 4x + ay \le 4 \end{cases}$ и $0 \le x \le \sqrt{4 - y^2}$. Найти все значения параметра *a,* при которых общая часть этих множеств имеет наибольшую площадь. Вычислить эту площадь.

Ответ: $a \ge \dfrac{2}{\sqrt{101} - 5}$ и $S = 2\mathrm{arctg}10$.

12. Сколько решений при различных значениях *a* имеют уравнения:

1) $\left|x^2 - 1\right| = a$.

Ответ: a < 0 – нет решений; $\begin{cases} a = 0 \\ a > 1 \end{cases}$ -2; a = 1 – 3; 0 < a < 1 –4.

2) $\left|x^2 - a^2\right| = 1$

Ответ: $0 \le a < 1 - 2$; a = 1 – 3; $a > 1 - 0; a < 1 - 4$.

3) $\left|x^2 + a\right| = 1$

Ответ: $\left|a\right| < 1 - 2$; a = 1 – 1; a = –1 – 3; $a > 1 - 0; a < 1 - 4$.

4) $\left|x^2 - 2x\right| = a$.

Ответ: a<0 – нет решений; $\begin{cases} a = 0 \\ a > 1 \end{cases} \Rightarrow 2; a = 1 \Rightarrow 340 < a < 1 \Rightarrow 4$.

13. Для всех значений a решить уравнение $2x^2 - (a+2)x^2 -$ $- ax + a^2 = 0$.

Ответ: если $a < -\dfrac{1}{4}$, то $x = \dfrac{a}{2}$; если $a = -\dfrac{1}{4}$, то $x = -\dfrac{1}{8}$ и $\dfrac{1}{2}$; если $a > -\dfrac{1}{4}$, то $x = \dfrac{a}{2}$ и $\dfrac{1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{1}{4} + a}$.

14. Найти все значения параметра *a*, при которых отношение корней уравнения $x^2 - (a + 3)x + 6 = 0$ равно $\dfrac{3}{2}$.

Ответ: a = 2 или a = –8.

15. Определить, для каких *a* неравенство $\log_{\frac{1}{a+1}}(x^2 + 2\left|a\right|) > 0$ выполняется при любом *x*.

Ответ: $-1 < a < -\dfrac{1}{2}$.

16. Найти все значения параметра *в*, при которых система $\begin{cases} \cos(y - в) - 2\cos x = 0 \\ \log_2(вy - y^2) = 2\log_4(-x) - \log_{\frac{1}{2}}(3y) \end{cases}$ имеет нечетное число решений.

Ответ: $3(2k+1)\pi < в \le 6(k+1)\pi - \dfrac{3\pi}{2} \quad k = 0,1,2,\ldots$

17. Найти все значения *x*, удовлетворяющие уравнению $\log_2(a^2x^3 - 5a^2x^2 + \sqrt{6 - x}) = \log_{2+a^2}(3 - \sqrt{x - 1})$ при любом *a.*

Ответ: x = 5

18. Найти все x такие, что для каждого их них равенство $x^2|2x-a|-16=0$ выполняется хотя бы при одном a из отрезка [-16,8].

Ответ: $-4 \le x \le -2$ или $0 \le x \le 4$.

19. Для всех значений a решить неравенство $(x^2-4)(x-a) < 0$.

Ответ: если $a < -2$, то $a < x < -1$, $x > 1$; если $a = -2$, то $x = -2$, $x \ge 2$; если $-2 < a < 2$, то $x \ge 2 \le x \le a$; если $a - 2$, то $x \ge -2$; если $a > 2$, то $x \ge a$, $-2 \le x \le 2$.

20. Для каждого значения параметра a решить уравнение $\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = a$.

Ответ: если $\frac{-\sqrt{10}-1}{2} \le a \le \frac{-\sqrt{10}-1}{2}$, то

$$x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 3 + (-1)^n \frac{1}{2}\arcsin\frac{2a+1}{\sqrt{10}} + \frac{\pi}{2}n \text{ и } n \in Z;$$

при других a решений нет.

21. Найти все значения параметра a, при которых всякое решение неравенства $\frac{\log_3(x^2-3x+7)}{\log_3(3x+2)} < 1$ является также решением неравенства $x^2 + (5-2a)x - 10a \le 0$.

Ответ: $a \ge 5/2$.

22. Решить уравнение $\sqrt{-7x^2+3x+4} = [2-\sin^2 x]$, где [ ] – целая часть числа.

Ответ: $x_1 = 0$ или $x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{93}}{14}$.

23. Решить уравнение $\log_2([x]-10) - \left[\frac{2}{\log_2 x}\right] = 3$.

Ответ. $18 \le x < 19$.

24. Найти площадь области, ограниченной линиями $\begin{cases} y \le 2x; \\ 0 \le x \le 3; \\ y \ge 0; \\ [x] \le [y]. \end{cases}$

Ответ. 6.

25. Решить уравнение $\sqrt{2x-[x]} + \sqrt{2x+[x]} = 2$, где $[a]$ – целая часть числа a.

Ответ: $x = 1/2$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

БУБНОВА Нина Алексеевна
ПЛАТОНОВА Ольга Алексеевна
ХАХАНЯН Валерий Христофорович

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие

Под ред. О.А. Платоновой

Подписано в печать 2.12.14 Формат 60x84 $^1/_{16}$. Тираж 2000 экз.
Усл.-печ. л. – Заказ № .